TP 2 - VIBRATIONS

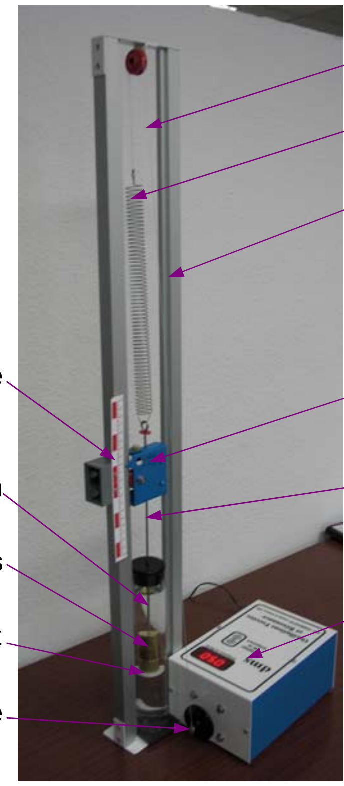
GMP Semestre 4 - Durée : 3 heures

I - INTRODUCTION

1 - OBJECTIF du TP et PREREQUIS

Valider le comportement vibratoire du système masse ressort amortisseur en oscillations libres et forcées.

2 - PRESENTATION de la MAQUETTE :



3 - HYPOTHESES :

- le ressort a une raideur notée K (N/m).
- les masses des différents éléments sont notées sur la maquette
- accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\ m/s^2$.
- l'amortissement est obtenu lorsque le cylindre pesant se déplace dans l'éprouvette remplie d'eau, celui-ci pouvant varié selon le diamètre de la rondelle blanche placée sous les cylindres pesants .
- l'amortissement est obligatoire dans le cas des oscillations forcées.
- l'excentration de la poulie en bout d'arbre (amplitude de l'excitation) est $e = 15\ mm$.
- La fréquence d'excitation en oscillations forcées est lue directement sur l'afficheur :

$$f\,(Hz \equiv s^{-1}) = \frac{\omega(rad\,/\,s)}{2\pi}$$ (ω : vitesse angulaire du moteur ou pulsation d'excitation)

- Prévoir un chronomètre et du papier millimétré pour le tracé des courbes.

II - VIBRATIONS à un DEGRE de LIBERTE (Rappels de cours)

Ce chapitre ne concerne que les systèmes ne possédant qu'un degré de liberté, c'est-à-dire paramétrés avec un seul paramètre de position (translation ou rotation) ou avec plusieurs paramètres de position liés entre eux par des lois entrée sortie.

Une vibration est un mouvement oscillatoire autour d'une position dite d'équilibre statique et provoquée par des forces "élastiques" provenant de ressorts (de traction, de compression ou de torsion) et l'élasticité des corps solides. Les vibrations dues à ces dernières ne seront pas abordées dans ce chapitre.

Un système mécanique est en :

- **oscillations libres** lorsque le mouvement vibratoire est obtenu par un "lâcher" après avoir écarté le système de sa position d'équilibre statique.
- **oscillations forcées** lorsque le mouvement vibratoire est obtenu par une force excitatrice extérieure agissant sur le système.

Une vibration peut être :

- amortie (frottement sec ou visqueux), le système est dit **dissipatif**.
- non amortie (pas de frottement), le système est dit **conservatif**.

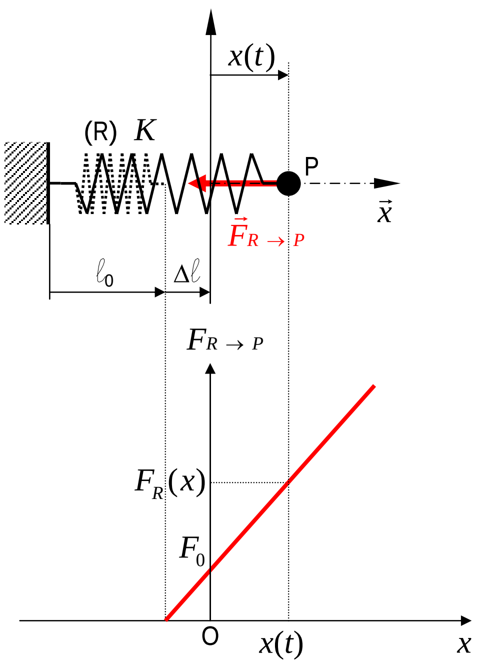
Les vibrations peuvent remplir une fonction dans le système mécanique étudié mais sont assez souvent parasites. Une étude de mécanique vibratoire permet d'isoler ou d'atténuer leur effet sur l'environnement du système en choisissant correctement la raideur de ses éléments élastiques et son amortissement.

Le contenu de ce chapitre concerne essentiellement l'oscillateur élémentaire constitué d'un système masse-ressort-amortisseur transposable dans de nombreuses applications.

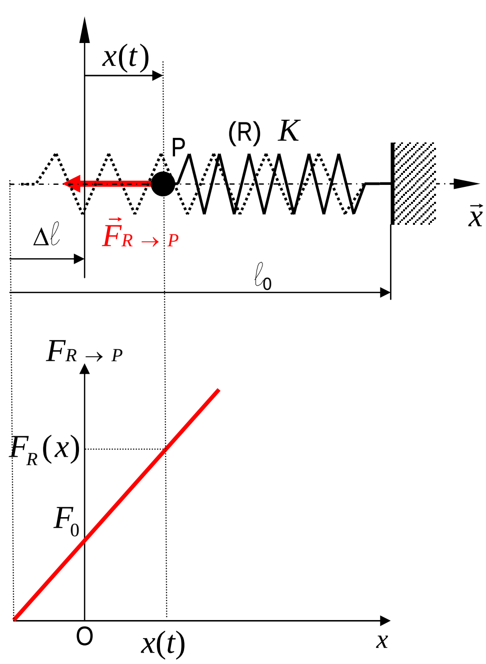
1 - OSCILLATIONS LIBRES d'un SYSTEME MASSE-RESSORT

1.1. Force de rappel d'un ressort

Ressort de traction



Ressort de compression



La caractéristique principale d'un ressort (R) est sa **raideur K (N/m)**, constante quelle que soit sa déformation. Sa **longueur libre** ℓ_0 correspond à sa longueur d'origine.

La **préflèche** $\Delta\ell$ correspond à la variation de longueur du ressort lors de la mise en place de celui-ci dans le système, ce qui permet de réaliser un force de rappel minimum ou **précharche** F_0.

L'intensité de la force de rappel $F_{R \to P}$ d'un ressort est proportionnelle, par sa raideur K, à son allongement (ressort de traction) ou son raccourcissement (ressort de compression) par rapport à sa longueur libre ℓ_0 :

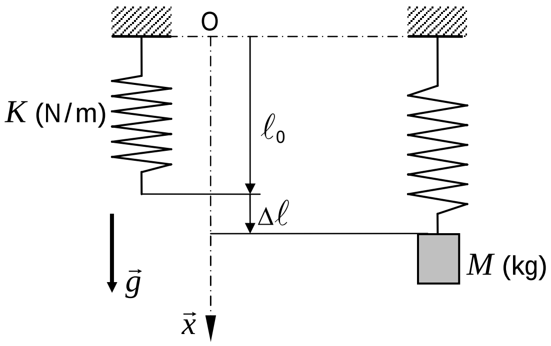
$$\boxed{F_{R \to P} = K.\left(x(t) + \Delta\ell\right) = F_0 + K.x(t) \text{ avec } F_0 = K.\Delta\ell}$$

L'intensité $F_{R \to P}$ de la force de rappel, fonction de l'allongement ou du raccourcissement $x(t)$, est donc représentée par une droite de pente K et d'ordonnée à l'origine F_0.

La force de rappel $\vec{F}_{R \to P}$ est dirigée vers le ressort pour les ressorts de traction et vers l'extérieur du ressort pour les ressorts de compression :

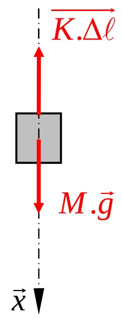
$$\boxed{\vec{F}_{R \to P} = -K.\left(x(t) + \Delta\ell\right).\vec{x} = -\left(F_0 + K.x(t)\right).\vec{x}}$$

1.2. Equilibre statique



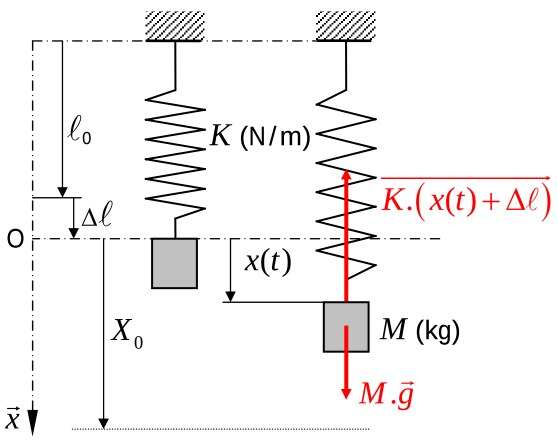
Le ressort étant à sa longueur libre ℓ_0, la masse M est accrochée à son extrémité. Le ressort s'allonge de la quantité $\Delta\ell$. Le système est en **équilibre statique**.

En isolant la masse M :



Principe fondamental de la statique en projection sur $\vec{x}$ $\to$ $\boxed{M.g - K.\Delta\ell = 0}$

1.3. Equation de mouvement du système conservatif



La mise en mouvement du système est effectuée par un lâcher d'amplitude X_0 **par rapport à la position d'équilibre statique** et sans vitesse initiale.

Le paramètre de position en translation $x(t)$ de la masse M est mesuré à partir de la position d'équilibre statique.

a) Equation différentielle de mouvement

Théorème de la résultante dynamique appliqué à la masse M en projection sur l'axe $\vec{x}$ de translation :

$$\rightarrow \; M.g - K.\left(x(t) + \Delta\ell\right) = M.\ddot{x}(t)$$

$\ddot{x}(t)$ étant l'accélération en translation de la masse M.

$$M.g - K.\Delta\ell = 0 \;\rightarrow\; -K.x(t) = M.\ddot{x}(t) \;\rightarrow\; \boxed{\ddot{x}(t) + \frac{K}{M}.x(t) = 0}$$

Cette équation différentielle, du type $\ddot{x}(t) + \omega_0^2.x(t) = 0$, est caractéristique d'un mouvement oscillatoire de **pulsation propre** ω_0 (rad/s) :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}} \qquad \left(\sqrt{\frac{N/m}{kg}} \equiv \sqrt{\frac{\cancel{m}}{s^2.\cancel{m}}} \equiv rad/s \quad \text{avec} \quad \frac{N}{kg} \equiv \frac{m}{s^2}\right)$$

b) Equations de mouvement

La solution de cette équation différentielle est de la forme : $x(t) = A.\cos\omega_0.t + B\sin\omega_0.t$

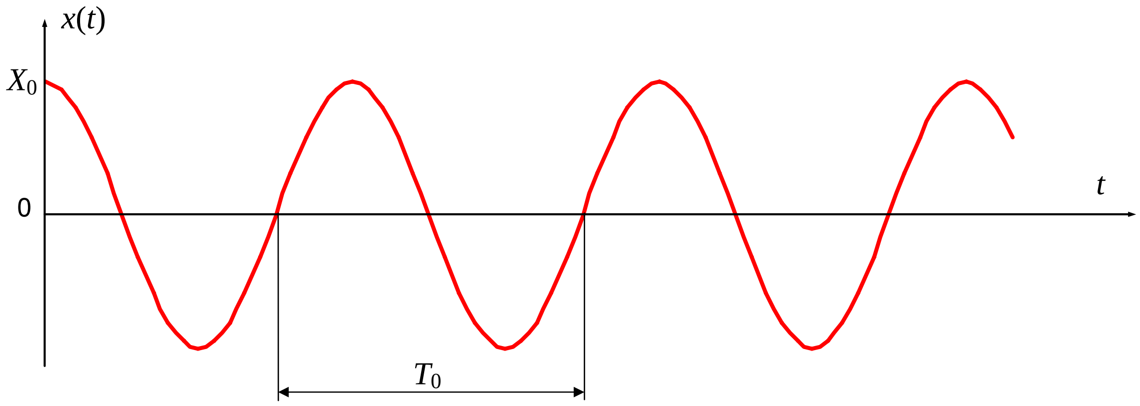
A et B représentant les constantes d'intégration liées aux conditions initiales du mouvement ($t = 0$).

Détermination de A et B pour un essai de lâcher à vitesse nulle avec un allongement X_0 par rapport à la position d'équilibre :

$$x(t) = A.\cos\omega_0.t + B\sin\omega_0.t \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dot{x}(t) = -A.\omega_0.\sin\omega_0.t + A.\omega_0.\cos\omega_0.t \\ \ddot{x}(t) = -A.\omega_0^2.\cos\omega_0.t - B.\omega_0^2.\sin\omega_0.t = -\omega_0^2.x(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = 0 = B.\omega_0 \rightarrow B = 0 \quad (\omega_0 \neq 0) \\ x(0) = X_0 = A \end{cases} \;\Rightarrow\; \boxed{x(t) = X_0.\cos\omega_0.t} \;\rightarrow\; \boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = -X_0.\omega_0.\sin\omega_0.t \\ \ddot{x}(t) = -X_0.\omega_0^2.\cos\omega_0.t = -\omega_0^2.x(t) \end{cases}}$$

$x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ sont les **équations de mouvement** de la masse M.

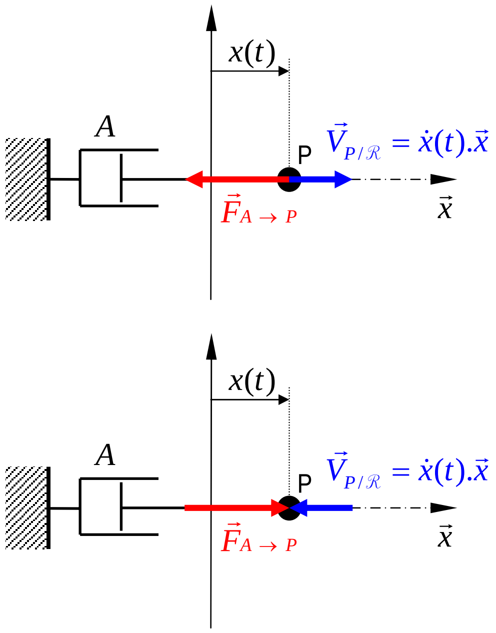


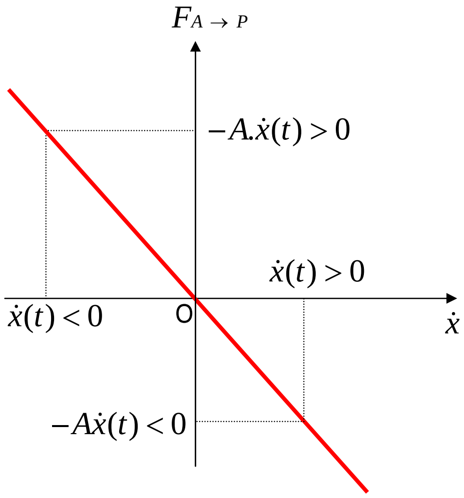
Le mouvement de la masse M est sinusoïdal de **période propre** T_0 :

$$\boxed{T_0 = \frac{2.\pi}{\omega_0} = 2.\pi.\sqrt{\frac{M}{K}}} \qquad \rightarrow\; x(t) = X_0.\cos\frac{2.\pi.t}{T_0}$$

2 - OSCILLATIONS LIBRES d'un SYSTEME MASSE-RESSORT-AMORTISSEUR

2.1. Force de rappel d'un amortisseur





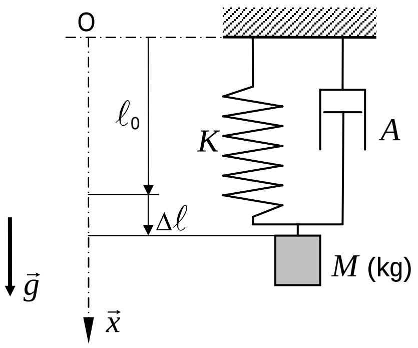
La caractéristique principale d'un amortisseur est son **amortissement visqueux A (Ns/m)**, constant quel que soit son fonctionnement. A peut également s'exprimer en kg/s ≡(Ns²/m)/s ≡ Ns/m.

La force de rappel $\vec{F}_{A \to P}$ d'un amortisseur est opposée au sens de déplacement de sa tige et son intensité est proportionnelle, par son amortissement A, à la norme $|\dot{x}(t)|$ de la vitesse $\vec{V}_{P/\mathcal{R}}$:

$$\boxed{\vec{F}_{A \to P} = -A.\dot{x}(t).\vec{x}}$$

La projection $F_{A \to P}$ de la force de rappel d'un amortisseur sur l'axe de translation $\vec{x}$, fonction de la vitesse $\dot{x}(t)$, est donc représentée par une droite passant par l'origine et de pente - A.

2.2. Equilibre statique



L'amortisseur n'agit pas sur la position d'équilibre statique puisqu'il n'intervient que s'il y a mouvement.

L'équation d'équilibre statique est donc celle définie en 1.2. :

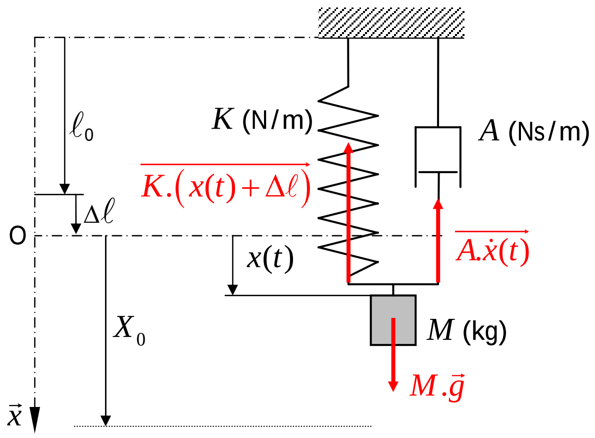
$$\boxed{M.g - K.\Delta\ell = 0}$$

2.3. Equation différentielle de mouvement du système dissipatif

La mise en mouvement du système est effectuée par un lâcher d'amplitude X_0 **par rapport à la position d'équilibre statique** et sans vitesse initiale.

Le paramètre de position en translation $x(t)$ de la masse M est mesuré à partir de la position d'équilibre statique.

a) Equation différentielle de mouvement



Théorème de la résultante dynamique appliqué à ma masse M en projection sur l'axe $\vec{x}$ de translation :

$$\rightarrow \; M.g - K.\left(x(t)+\Delta\ell\right) - A.\dot{x}(t) = M.\ddot{x}(t)$$

$$M.g - K.\Delta\ell = 0 \;\rightarrow\; -A.\dot{x}(t) - K.x(t) = M.\ddot{x}(t)$$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{x}(t) + \frac{A}{M}.\dot{x}(t) + \underbrace{\frac{K}{M}}_{\omega_0^2}.x(t) = 0}$$

b) Equations de mouvement

La solution de cette équation différentielle est de la forme : $x(t) = a.e^{r.t}$

où a et r sont des constantes liées à l'équation différentielle.

$$x(t) = a.e^{r.t} \;\rightarrow\; \dot{x}(t) = a.r.e^{r.t} = r.x(t) \;\rightarrow\; \ddot{x}(t) = a.r^2.e^{r.t} = r^2.x(t)$$

En reportant dans l'équation différentielle :

$$\underbrace{r^2.x(t)}_{\ddot{x}(t)} + \frac{A}{M}.\underbrace{r.x(t)}_{\dot{x}(t)} + \frac{K}{M}.x(t) = 0 \;\rightarrow\; \cancel{x(t)}.\left(r^2 + \frac{A}{M}.r + \frac{K}{M}\right) = 0$$

$\rightarrow \forall x(t),\; r$ doit vérifier l'équation caractéristique : $r^2 + \dfrac{A}{M}.r + \dfrac{K}{M} = 0$

Discriminant : $\Delta = \left(\dfrac{A}{M}\right)^2 - 4.\dfrac{K}{M}$ qui peut être positif, négatif ou nul.

$\Delta = 0 \;\Rightarrow\; A^2 - 4.K.M = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_C = 2.\sqrt{K.M}}$ représente l'**amortissement critique**.

$$\left(\sqrt{\frac{N}{m}.kg} \equiv \sqrt{\frac{N}{m}.\frac{N}{m/s^2}} \equiv \sqrt{\frac{N^2.s^2}{m^2}} \equiv N.s/m\right)$$

En posant : $\boxed{\xi = \dfrac{A}{A_C} = \dfrac{A}{2\sqrt{K.M}}}$ **coefficient d'amortissement** (sans dimension) $\rightarrow A = 2.\xi.\sqrt{K.M}$

L'équation différentielle devient :

$$\ddot{x}(t) + \frac{2.\xi.\sqrt{K.M}}{M}.\dot{x}(t) + \frac{K}{M}.x(t) = 0 \;\rightarrow\; \ddot{x}(t) + 2.\xi.\sqrt{\frac{K}{M}}.\dot{x}(t) + \frac{K}{M}.x(t) = 0$$

Elle est donc du type : $\boxed{\ddot{x}(t) + 2.\xi.\omega_0.\dot{x}(t) + \omega_0^2.x(t) = 0}$

L'équation caractéristique s'écrit : $r^2 + 2.\xi.\omega_0.r + \omega_0^2 = 0$ de discriminant $\Delta = 4.\omega_0^2.\left(\xi^2 - 1\right)$

La résolution de l'équation caractéristique entraîne trois cas :

- $\xi = 1$ $(A = A_C) \rightarrow$ 1 racine double r définissant le **régime d'amortissement critique**,
- $\xi < 1$ $(A < A_C) \rightarrow$ 2 racines complexes conjuguées r_1 et r_2 définissant un **régime sous-amorti**,
- $\xi > 1$ $(A > A_C) \rightarrow$ 2 racines réelles r_1 et r_2 définissant un **régime sur-amorti**.

L'équation de mouvement $x(t)$ prend une forme différente pour chacun des 3 cas.

La résolution qui suit sera considérée pour un essai de lâcher à vitesse nulle avec un allongement X_0 par rapport à la position d'équilibre.

2.4. Equations de mouvement du système dissipatif

a) Régime critique : $\xi = 1$ $(A = A_C)$

$$r^2 + 2\omega_0.r + \omega_0^2 = \left(r + \omega_0\right)^2 = 0 \rightarrow \text{racine double } \; r = -\omega_0$$

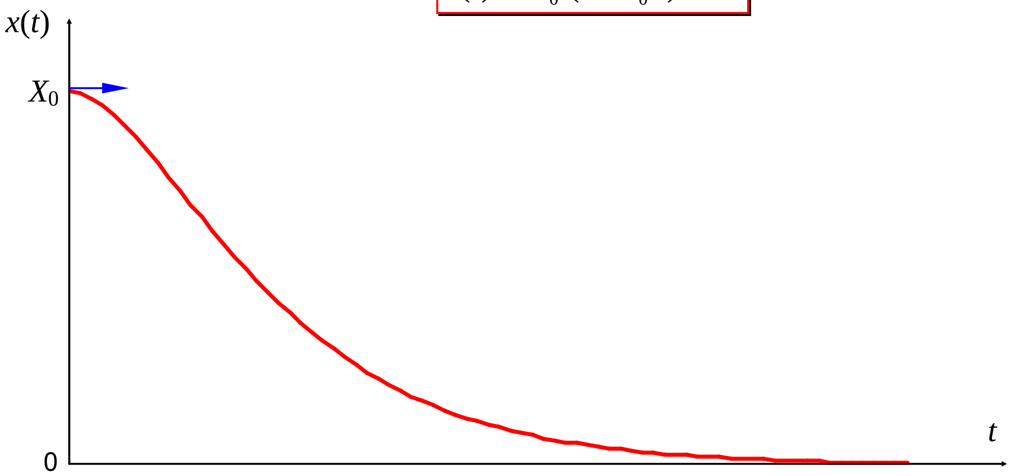
Si $a.e^{r.t} = a.e^{-\omega_0.t}$ est solution de $\ddot{x}(t) + 2.\omega_0.\dot{x}(t) + \omega_0^2.x(t) = 0$, l'expression $b.t.e^{-\omega_0.t}$ vérifie également l'équation différentielle (b constante) :

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) + 2.\omega_0.\dot{x}(t) + \omega_0^2.x(t) &= \omega_0^2.b.t.e^{-\omega_0.t} + 2.\omega_0.b.e^{-\omega_0.t}.\left(1-\omega_0.t\right) - b.\omega_0.e^{-\omega_0.t}.\left[\left(1-\omega_0.t\right)+1\right] \\ &= b.\omega_0.e^{-\omega_0.t}.\left[\omega_0.t + 2\left(1-\omega_0.t\right) - \left(2-\omega_0.t\right)\right] = 0\end{aligned}$$

La solution est donc de la forme : $x(t) = \left(a + b.t\right).e^{r.t} = \left(a + b.t\right).e^{-\omega_0.t} \rightarrow x(0) = a = X_0$

$$\dot{x}(t) = \left[b - \omega_0.\left(a + b.t\right)\right].e^{-\omega_0.t} \rightarrow \dot{x}(0) = b - a.\omega_0 = 0 \rightarrow b = a.\omega_0 = X_0.\omega_0$$

$$\rightarrow \boxed{x(t) = X_0.(1 + \omega_0.t).e^{-\omega_0.t}}$$



Après le lâcher, le retour à la position d'équilibre statique ($x(t) = 0$) s'effectue de façon la plus rapide possible sans oscillation.

Mathématiquement $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$, ce qui veut dire que le système ne revient jamais exactement à sa position d'équilibre statique. Afin de calculer un temps de retour, il est nécessaire de donner la précision correspondant à une position d'équilibre acceptable :

Par exemple : $t = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow x = X_0.(1 + 2\pi).e^{-2\pi} = 0{,}0136.X_0$ correspondant à une précision de 1,36%.

b) Régime sur-amorti : $\xi > 1$ ($A > A_C$)

$r^2 + 2.\xi.\omega_0.r + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \Delta = 4.\omega_0^2.\left(\xi^2 - 1\right) > 0 \rightarrow$ 2 racines réelles r_1 et r_2 :

$$r_1 = -\omega_0.\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \quad et \quad r_2 = -\omega_0.\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

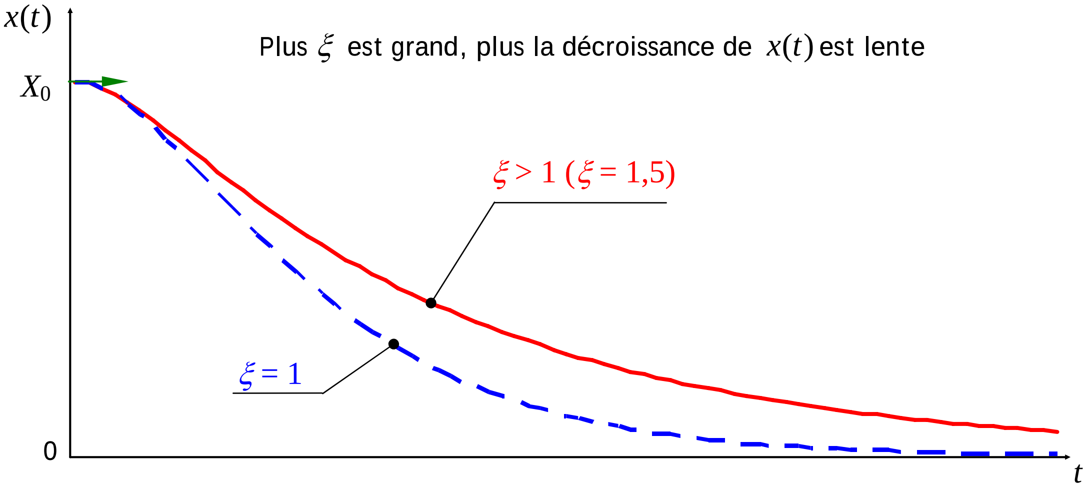
La solution de l'équation différentielle $\ddot{x}(t) + 2.\xi.\omega_0.\dot{x}(t) + \omega_0^2.x(t) = 0$ est de la forme :

$$x(t) = a.e^{r_1.t} + b.e^{r_2.t} \rightarrow x(0) = a + b = X_0$$

$$\dot{x}(t) = a.r_1.e^{r_1.t} + b.r_2.e^{r_2.t} \rightarrow \dot{x}(0) = a.r_1 + b.r_2 = 0 \rightarrow \quad a = \frac{X_0.r_2}{r_2 - r_1} \quad et \quad b = \frac{X_0.r_1}{r_1 - r_2}$$

$$\rightarrow a = \frac{-X_0.\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)}{2.\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad \text{et} \quad b = \frac{X_0.\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)}{2.\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$\rightarrow \boxed{x(t) = \frac{X_0}{2}.e^{-\xi.\omega_0.t}.\left[\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right)e^{-\omega_0.\sqrt{\xi^2-1}.t} + \left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right)e^{\omega_0.\sqrt{\xi^2-1}.t}\right]}$$



c) Régime sous-amorti : $\xi < 1$ ($A < A_C$)

$r^2 + 2.\xi.\omega_0.r + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \Delta = 4.\omega_0^2.\left(\xi^2 - 1\right) < 0 \rightarrow$ 2 racines complexes conjuguées r_1 et r_2 :

$$r_1 = -\omega_0.\left(\xi + j.\sqrt{1 - \xi^2}\right) \quad et \quad r_2 = -\omega_0.\left(\xi - j.\sqrt{1 - \xi^2}\right) \quad \text{avec} \quad j^2 = -1$$

La solution de l'équation différentielle $\ddot{x}(t) + 2.\xi.\omega_0.\dot{x}(t) + \omega_0^2.x(t) = 0$ est de la forme :

$$x(t) = a.e^{r_1.t} + b.e^{r_2.t} \quad \text{avec} \quad a = \frac{X_0.r_2}{r_2 - r_1} \quad et \quad b = \frac{X_0.r_1}{r_1 - r_2} \quad \textit{(voir 2.4.b))}$$

$$\rightarrow a = \frac{-X_0.\left(\xi - j.\sqrt{1 - \xi^2}\right)}{2.j.\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{X_0}{2}.\left(1 + \frac{j.\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) \quad \text{et} \quad b = \frac{X_0.\left(\xi + j.\sqrt{1 - \xi^2}\right)}{2.j.\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{X_0}{2}.\left(1 - \frac{j.\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$$

En posant $\Omega = \omega_0.\sqrt{1 - \xi^2} \rightarrow x(t) = \frac{X_0}{2}\left[\left(1 + \frac{j.\xi.\omega_0}{\Omega}\right).e^{-(\omega_0.\xi + j.\Omega).t} + \left(1 - \frac{j.\xi.\omega_0}{\Omega}\right).e^{-(\omega_0.\xi - j.\Omega).t}\right]$

$$\rightarrow x(t)=\frac{X_0}{2}.e^{-\omega_0.\xi.t}\left[\left(1+\frac{j.\xi.\omega_0}{\Omega}\right).e^{-j.\Omega.t}+\left(1-\frac{j.\xi.\omega_0}{\Omega}\right).e^{j.\Omega.t}\right]$$

$$e^{j.\Omega.t}=\cos\Omega.t+j.\sin\Omega.t \quad \text{et} \quad e^{-j.\Omega.t}=\cos(-\Omega.t)+j.\sin(-\Omega.t)=\cos\Omega.t-j.\sin\Omega.t$$

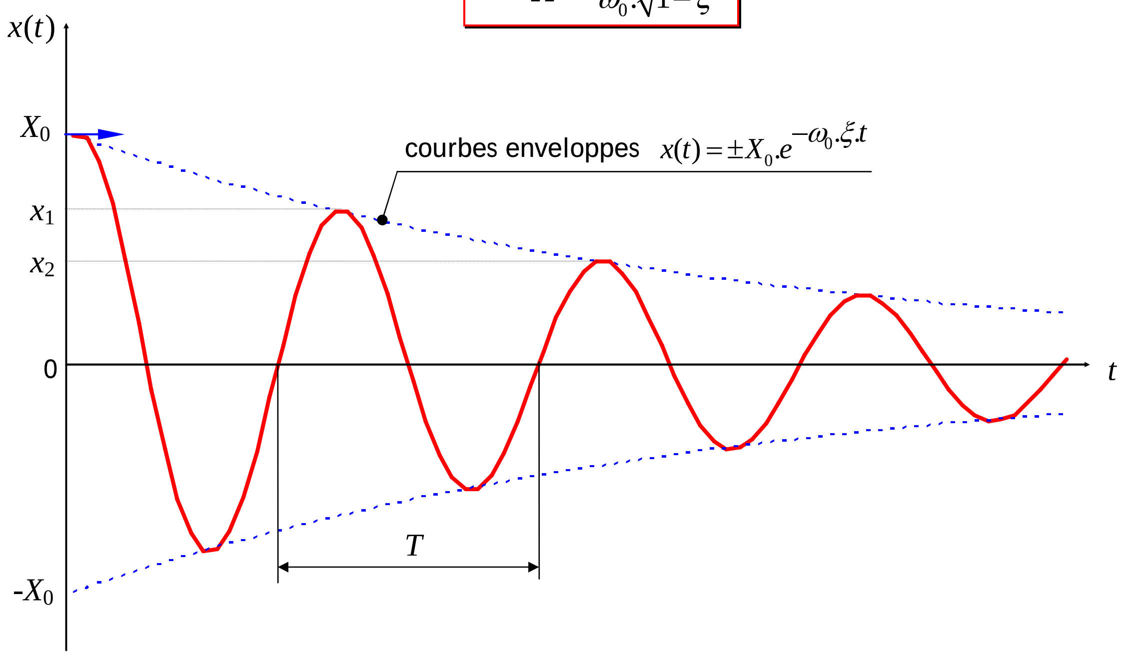
$$\rightarrow \boxed{x(t)=X_0.e^{-\omega_0.\xi.t}\left[\cos\Omega.t+\frac{\omega_0.\xi}{\Omega}\sin\Omega.t\right]}$$

La solution $x(t)$ correspond à un mouvement sinusoïdal amorti de **pseudo-pulsation** :

$$\boxed{\Omega=\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}.$$

L'intervalle de temps correspondant à une oscillation est la **pseudo-période** définie par :

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{2\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}}$$



Décrément logarithmique : mesure expérimentale du coefficient d'amortissement ξ

En considérant N périodes d'oscillations : $\delta=\frac{1}{N}.\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+N.T)}\right)$

$$\delta=\frac{1}{N}.\ln\left(\frac{e^{-\omega_0.\xi.t}}{e^{-\omega_0.\xi.(t+N.T)}}\right)=\frac{1}{N}.\ln\left(e^{\omega_0.\xi.N.T}\right)\Rightarrow \boxed{\delta=\omega_0.\xi.T=\frac{2\pi.\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

En mesurant les amplitudes x_1 et x_2 par rapport à la position d'équilibre des deux premières oscillations ($N=1$), on obtient par ailleurs :

$$\boxed{\delta=\frac{1}{N}.\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+N.T)}\right)=\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)=\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right)=\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}$$

$$\delta^2=\frac{4\pi^2.\xi^2}{1-\xi^2}\rightarrow \xi^2\left(4.\pi^2+\delta^2\right)=\delta^2 \Rightarrow \boxed{\xi=\delta.\sqrt{\frac{1}{4.\pi^2+\delta^2}}} \text{ avec } \delta=\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

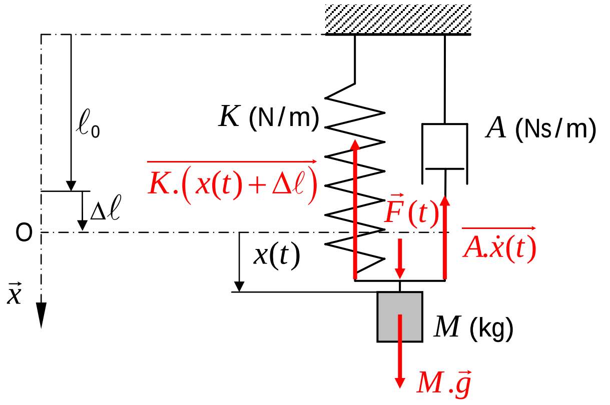
3 - OSCILLATIONS FORCEES d'un SYSTEME MASSE-RESSORT-AMORTISSEUR

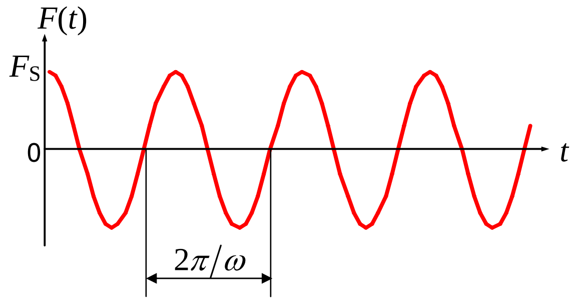
3.1. Equation différentielle de mouvement du système

La mise en mouvement du système est effectuée par une force d'excitation $\vec{F}(t)$ ou un déplacement imposé $X(t)$.

Le paramètre de position en translation $x(t)$ de la masse M (**réponse** du système) est mesuré à partir de la position d'équilibre statique inchangée par rapport aux cas précédents : $M.g - K.\Delta\ell = 0$

a) Equation différentielle de mouvement avec une force d'excitation appliquée à la masse





$F(t)$ est une **force d'excitation harmonique** (sinusoïdale), d'amplitude constante F_S, de la forme :

$F(t) = F_S.\cos\omega.t$ où ω est la **pulsation d'excitation** de la force $F(t)$.

Théorème de la résultante dynamique appliqué à la masse M en projection sur l'axe $\vec{x}$ de translation :

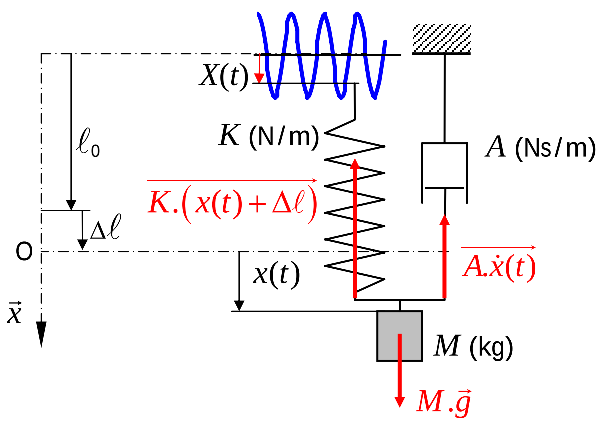
$$\rightarrow \quad M.g - K.\big(x(t)+\Delta\ell\big) - A.\dot{x}(t) + F(t) = M.\ddot{x}(t)$$

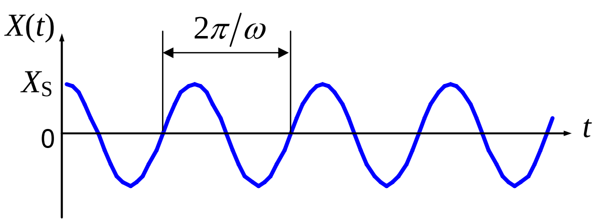
Equation d'équilibre statique : $M.g - K.\Delta\ell = 0$

$$\rightarrow \quad -A.\dot{x}(t) - K.x(t) + F(t) = M.\ddot{x}(t) \quad \rightarrow \quad \ddot{x}(t) + \frac{A}{M}.\dot{x}(t) + \frac{K}{M}.x(t) = \frac{F(t)}{M}$$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{x}(t) + 2.\xi.\omega_0.\dot{x}(t) + \omega_0^2.x(t) = \frac{F_S}{M}.\cos\omega.t}$$

b) Equation différentielle de mouvement avec un déplacement imposé du ressort





$X(t)$ est le déplacement sinusoïdal imposé de l'extrémité du ressort précédemment accroché au bâti, d'amplitude constante X_S (**amplitude statique**) et de la forme :

$X(t) = X_S.\cos\omega.t$ où ω est la **pulsation d'excitation** du déplacement imposé $X(t)$.

Théorème de la résultante dynamique appliqué à la masse M en projection sur l'axe $\vec{x}$ de translation :

$$\rightarrow \ M.g - K.\left(x(t) + \Delta\ell - X(t)\right) - A.\dot{x}(t) = M.\ddot{x}(t)$$

Equation d'équilibre statique : $M.g - K.\Delta\ell = 0$

$$\rightarrow \ -A.\dot{x}(t) - K.x(t) + K.X(t) = M.\ddot{x}(t) \ \rightarrow \ \ddot{x}(t) + \frac{A}{M}.\dot{x}(t) + \frac{K}{M}.x(t) = \frac{K}{M}.X(t)$$

$$\rightarrow \ \boxed{\ddot{x}(t) + 2.\xi.\omega_0.\dot{x}(t) + \omega_0^2.x(t) = \omega_0^2.X_S.\cos\omega.t}$$

En comparant avec l'équation différentielle trouvée précédemment, une relation peut être déduite entre les deux types d'excitation de même pulsation ω :

$$\frac{F_S}{M} = \omega_0^2.X_S \ \rightarrow \ \boxed{X_S = \frac{F_S}{K}}$$

3.2. Résolution de l'équation différentielle de mouvement en régime permanent

$$\ddot{x}(t) + 2.\xi.\omega_0.\dot{x}(t) + \omega_0^2.x(t) = \frac{F_S}{M}.\cos\omega.t = \omega_0^2.X_S.\cos\omega.t$$

La solution d'une équation différentielle avec second membre non nul est la somme de la solution générale sans second membre (oscillations libres amorties constituant le régime transitoire) et d'une solution particulière avec second membre (oscillations forcées constituant le régime permanent).

Du fait de l'amortissement, le régime transitoire disparaît rapidement et seul le régime permanent d'oscillations forcées entretenues subsiste.

La résolution de l'équation différentielle de mouvement en régime permanent consiste donc en la recherche d'une solution particulière.

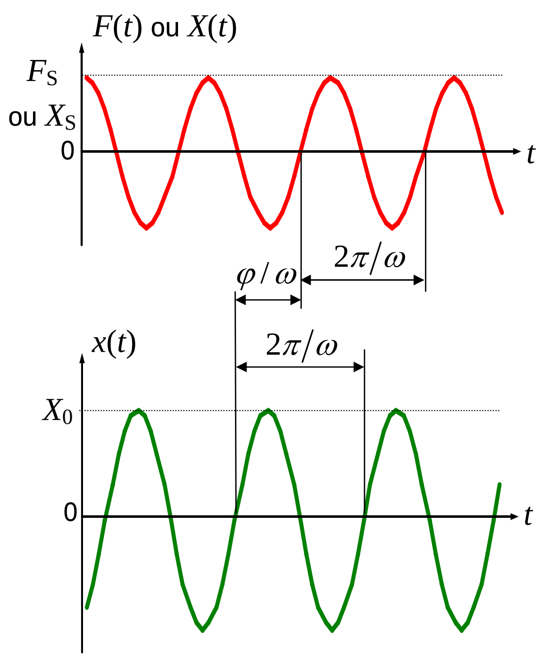
La solution particulière de l'équation différentielle est de type sinusoïdale, de pulsation identique à l'excitation de la forme :

$$x(t) = X_0.\cos\left(\omega.t - \varphi\right) = X_0.\cos\left[\omega.\left(t - \frac{\varphi}{\omega}\right)\right]$$

φ est l'angle de **déphasage** (retard) de la sinusoïde de la réponse $x(t)$ par rapport à la sinusoïde de l'excitation.

X_0 est l'**amplitude** de la réponse $x(t)$.

Le déphasage φ et l'amplitude X_0 de la réponse $x(t)$ sont des fonctions de la pulsation de l'excitation $F(t)$ ou $X(t)$.



La résolution de l'équation différentielle de mouvement en régime permanent (solution particulière) consiste à exprimer le déphasage φ et l'amplitude X_0 de la réponse $x(t)$.

$$x(t) = X_0.\cos(\omega.t-\varphi) \rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -X_0.\omega.\sin(\omega.t-\varphi) \\ \ddot{x}(t) = -X_0.\omega^2.\cos(\omega.t-\varphi) \end{cases}$$

$$\ddot{x}(t) + 2.\xi.\omega_0.\dot{x}(t) + \omega_0^2.x(t) = \frac{F_S}{M}.\cos\omega.t$$

$$\rightarrow \underbrace{-X_0.\omega^2.\cos(\omega.t-\varphi)}_{\ddot{x}(t)} + 2.\xi.\omega_0.\underbrace{\left[-X_0.\omega.\sin(\omega.t-\varphi)\right]}_{\dot{x}(t)} + \omega_0^2.\underbrace{X_0.\cos(\omega.t-\varphi)}_{x(t)} = \frac{F_S}{M}.\cos\omega.t$$

En remplaçant $\cos(\omega.t-\varphi)$ et $\sin(\omega.t-\varphi)$ par les formules trigonométriques d'addition :

$$\cos(\omega.t-\varphi) = \cos\omega.t.\cos\varphi + \sin\omega.t.\sin\varphi \quad \text{et} \quad \sin(\omega.t-\varphi) = \sin\omega.t.\cos\varphi - \cos\omega.t.\sin\varphi$$

puis en passant $X_0.\omega_0^2$ dans le deuxième membre et en mettant en facteur $\cos\omega.t$ et $\sin\omega.t$:

$$\cos\omega.t.\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right).\cos\varphi + 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0}.\sin\varphi\right] + \sin\omega.t.\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right).\sin\varphi - 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0}.\cos\varphi\right] = \frac{F_S}{M.X_0.\omega_0^2}.\cos\omega.t$$

En identifiant les termes en $\cos\omega.t$ et $\sin\omega.t$ dans les deux membres de l'équation, on obtient un système de deux équations à deux inconnues $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$:

$$\rightarrow \begin{cases} \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right).\cos\varphi + 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0}.\sin\varphi = \frac{F_S}{M.X_0.\omega_0^2} = \frac{F_S}{K.X_0} = \frac{X_S}{X_0} \\ 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0}.\cos\varphi - \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right).\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Par la méthode des déterminants, la solution du système est :

$$\sin\varphi = \frac{\begin{vmatrix} 1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} & \frac{X_S}{X_0} \\ 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} & 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0} \\ 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0} & -\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \end{vmatrix}} = \frac{2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4.\xi^2.\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.\frac{X_S}{X_0}$$

et $$\cos\varphi = \frac{\begin{vmatrix} \frac{X_S}{X_0} & 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0} \\ 0 & -\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} & 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0} \\ 2.\xi.\frac{\omega}{\omega_0} & -\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \end{vmatrix}} = \frac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4.\xi^2.\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.\frac{X_S}{X_0}$$

Il est à remarquer que $\sin\varphi$ est uniquement positif alors que $\cos\varphi$ peut être positif ou négatif : le déphasage est donc tel que $0 \le \varphi \le \pi$.

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2.\xi.\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \rightarrow \boxed{\varphi = \arctan\left[\frac{2.\xi.\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right]} \quad \text{avec } 0 \le \varphi \le \pi$$

En appliquant la relation $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, on obtient :

$$\frac{4.\xi^2.\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}{\left[\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4.\xi^2.\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2}.\left(\frac{X_S}{X_0}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{\left[\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4.\xi^2.\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}.\left(\frac{X_S}{X_0}\right)^2 = 1$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{X_0}{X_S} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4.\xi^2.\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{X_0 = \frac{\dfrac{F_S}{K}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4.\xi^2.\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$

En sortant $\dfrac{1}{M^2.\omega^4}$ de la racine, on obtient une autre définition de l'amplitude :

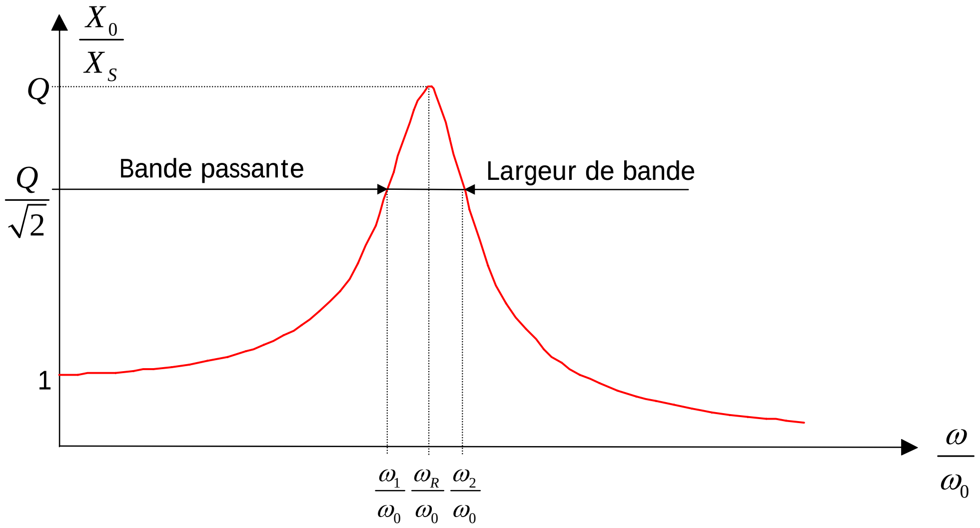
$$X_0 = \frac{\dfrac{F_S}{K}}{\sqrt{\dfrac{1}{M^2.\underbrace{\omega_0^4}_{\frac{K^2}{M^2}}}\left[\left(M.\underbrace{\omega_0^2}_{\frac{K}{M}} - M.\omega^2\right)^2 + 4.\underbrace{\frac{A^2}{4.K.M}}_{\xi^2}.M^2.\omega^2.\underbrace{\omega_0^2}_{\frac{K}{M}}\right]}} \rightarrow \boxed{X_0 = \frac{F_S}{\sqrt{\left(K - M.\omega^2\right)^2 + A^2.\omega^2}}}$$

3.3. Courbes d'amplitude et de déphasage en fonction de la pulsation d'excitation

a) Rapport d'amplitude :

$$\frac{X_0}{X_S} = \frac{X_0}{F_S/K} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4.\xi^2.\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

En traçant la courbe du rapport d'amplitude $\dfrac{X_0}{X_S}$ en fonction du rapport de pulsation $\dfrac{\omega}{\omega_0}$, une résonance d'amplitude (maximum) est observée au voisinage pour $\dfrac{\omega}{\omega_0} \approx 1$ lorsque le coefficient d'amortissement ξ est faible.



La résonance d'amplitude, mesurée par le **coefficient de surtension** $Q = \left(\frac{X_0}{X_S}\right)_{\text{maxi}}$, correspond à une pulsation d'excitation, appelée **pulsation de résonance** ω_R, située avant la pulsation propre ω_0.

- Pulsation de résonance :

$$\omega = \omega_R \text{ pour } \left(\frac{X_0}{X_S}\right) \text{ maximum soit, en posant } \frac{\omega}{\omega_0} = \lambda \text{ , } \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{X_0}{X_S}\right) = 0$$

$$\frac{X_0}{X_S} = \left[\left(1-\lambda^2\right)^2 + 4.\xi^2.\lambda^2\right]^{-1/2} = \left[\lambda^4 + 2(2\xi^2-1)\lambda^2 + 1\right]^{-1/2}$$

$$\rightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{X_0}{X_S}\right) = \frac{\left[4\lambda^3 + 4(2\xi^2-1)\lambda\right]}{2.\left[\lambda^4 + 2(2\xi^2-1)\lambda^2 + 1\right]^{3/2}} = 0 \Rightarrow 4\lambda\left[\lambda^2 + 2\xi^2 - 1\right] = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 + 2\xi^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0$ ($\omega = 0$) représente la tangente horizontale au départ de la courbe à $\frac{X_0}{X_S} = 1$

$\lambda^2 + 2\xi^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \sqrt{1-2\xi^2}$ si $2\xi^2 < 1 \rightarrow \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

- La pulsation de résonance est donc définie par $\boxed{\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}$ si $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, il n'y a pas de résonance d'amplitude.

- Si $\xi \ll 1 \rightarrow \boxed{\omega_R \approx \omega_0}$ (ξ est considéré faible lorsqu'il est inférieur à 0,1)

- Coefficient de surtension :

$$Q = \frac{X_0}{X_S}\left(\frac{\omega_R}{\omega_0}\right) = \left[\left(1-(1-2\xi^2)\right)^2 + 4.\xi^2.(1-2\xi^2)\right]^{-1/2} \rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{2.\xi.\sqrt{(1-\xi^2)}}}$$

Si $\xi \ll 1 \rightarrow \boxed{Q \approx \frac{1}{2.\xi}}$

- Bande passante :

La bande passante est la valeur de $\left(\dfrac{X_0}{X_S}\right)$ pour laquelle l'énergie potentielle du ressort devient supérieure à la moitié de l'énergie potentielle à la pulsation de résonance.

Energie potentielle du ressort : $E_P = \dfrac{1}{2}.K.X_0^2$

Energie potentielle du ressort à la résonance : $E_{P_R} = \dfrac{1}{2}.K.\underbrace{\left(Q.X_S\right)}_{X_{0_R}}{}^2$

$$E_P = 0,5.E_{P_R} \rightarrow K.X_0^2 = \frac{1}{2}.K.\left(Q.X_S\right)^2 \rightarrow \left(\frac{X_0}{X_S}\right)^2 = \frac{Q^2}{2} \rightarrow \frac{X_0}{X_S} = \frac{Q}{\sqrt{2}}$$

La bande passante, correspondant à un rapport d'amplitude égal à $Q/\sqrt{2}$, est appelée **bande passante à -3dB**. En effet, le décibel (10 Bel) est défini par dix fois le logarithme décimal d'un rapport de puissance (ou d'énergie) :

$$dB = 10.\log\left(\frac{E_P}{E_{P_R}}\right) = 10.\log 0,5 \approx -3dB$$

- Largeur de bande :

La largeur de bande est l'intervalle de pulsation autour de ω_R où le rapport d'amplitude $\dfrac{X_0}{X_S}$ est supérieur à la bande passante $Q/\sqrt{2}$:

$$\Delta\Omega = \omega_2 - \omega_1 \text{ avec } \frac{X_0}{X_S}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) = \frac{X_0}{X_S}\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right) = \frac{Q}{\sqrt{2}}$$

En posant $\dfrac{\omega}{\omega_0} = \lambda$, $\dfrac{X_0}{X_S} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\lambda^2\right)^2 + 4.\xi^2.\lambda^2}} = \dfrac{Q}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2.\xi.\sqrt{2.(1-\xi^2)}}$

$$\Rightarrow \left(1-\lambda^2\right)^2 + 4.\xi^2.\lambda^2 = 8.\xi^2.(1-\xi^2) \rightarrow \lambda^4 + 2.\left(2.\xi^2 - 1\right).\lambda^2 + \left(1 - 8.\xi^2.(1-\xi^2)\right) = 0$$

$$\Delta' = \left(2.\xi^2 - 1\right)^2 - \left(1 - 8.\xi^2.(1-\xi^2)\right) = 4.\xi^2(1-\xi^2) > 0 \text{ car } \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\left(2.\xi^2 - 1\right) \pm 2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}$$

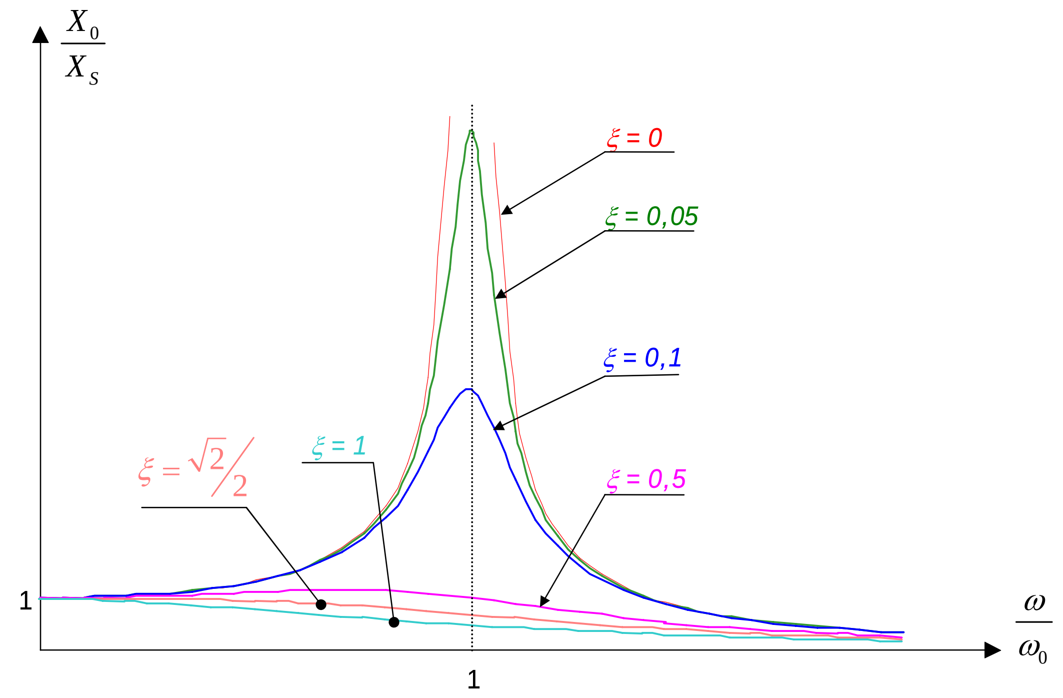
$$\rightarrow \boxed{\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = 1 - 2.\xi^2 - 2.\xi.\sqrt{1-\xi^2} \text{ et } \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 = 1 - 2.\xi^2 + 2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}}$$

La formulation de la largeur de bande est simple si ξ est faible :

$$\xi^2 \approx 0 \rightarrow \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = 1 - 2.\xi \text{ et } \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 = 1 + 2.\xi \rightarrow \Delta\Omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0.\left(\sqrt{1+2.\xi} - \sqrt{1-2.\xi}\right)$$

$$\sqrt{1+2.\xi} \approx 1 + \xi \text{ et } \sqrt{1-2.\xi} \approx 1 - \xi \rightarrow \boxed{\Delta\Omega \approx 2.\xi.\omega_0}$$

- Evolution de la courbe d'amplitude en fonction du facteur d'amortissement ξ :



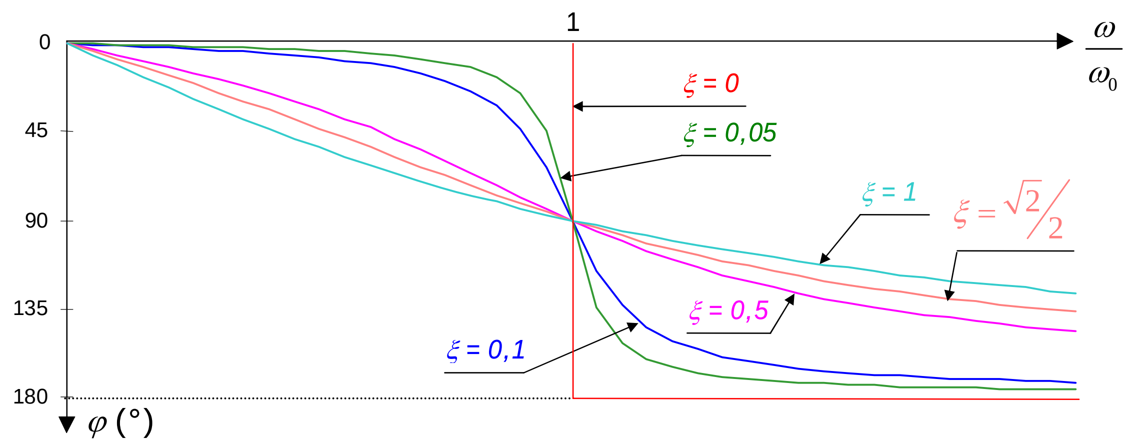
b) Déphasage : $\varphi = \arctan\left[\dfrac{2.\xi.\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right]$ avec $0 \le \varphi \le \pi$

	$\omega = 0^+$	$\omega = \omega_0$	$\omega \rightarrow +\infty$
$\forall \xi \neq 0$	$\lim\limits_{\omega \to 0^+} \tan\varphi = 0^+ \rightarrow \varphi = 0°$	$\lim\limits_{\omega \to \omega_0} \tan\varphi = +\infty \rightarrow \varphi = 90°$	$\lim\limits_{\omega \to +\infty} \tan\varphi = 0^- \rightarrow \varphi = 180°$
$\xi = 0$	$\tan\varphi = 0^+ \rightarrow \varphi = 0°\ \forall \omega < \omega_0$	Résonance de phase	$\tan\varphi = 0^- \rightarrow \varphi = 180°\ \forall \omega > \omega_0$

$\forall \xi \neq 0$, toutes les courbes passent par $\varphi = 90°$ pour $\omega = \omega_0$.

Au voisinage de $\omega = \omega_0$, lorsque ξ est faible, le déphasage augmente rapidement.

$\omega = \omega_0$ est la pulsation de résonance de phase



III - REALISATION du TP2 « VIBRATIONS »

1 - OSCILLATIONS LIBRES du SYSTEME CONSERVATIF

Oscillations à l'air libre, sans excitation et sans amortissement visqueux.

1.1. Réalisation de la position d'équilibre statique

Le bouchon est en appui sur l'éprouvette.

Régler le "0" sur la réglette graduée à l'équilibre statique.

Après avoir ajouté délicatement une masse de $100g$ sur le chariot de guidage, calculer la raideur K du ressort en précisant son unité.

1.2. Etude des oscillations libres non amorties

Quels sont les éléments constituant la masse oscillante M ? Donner sa valeur en kg.

Calculer la pulsation propre ω_0 (rad/s) du système conservatif.

Réaliser un essai de lâcher à vitesse initiale nulle d'amplitude maximum par rapport à la position d'équilibre statique.

Chronométrer la période T_0 (s) des oscillations (moyenne sur 2 oscillations vu le frottement du chariot de guidage sur les colonnes du bâti).

Retrouver l'ordre de grandeur de la valeur mesurée en calculant la période T_0 (s) théorique.

Commenter les résultats obtenus.

2 - OSCILLATIONS LIBRES du SYSTEME DISSIPATIF

L'amortissement est réalisé en faisant osciller les masses suspendues dans l'éprouvette remplie d'eau.

Le disque d'amortissement, selon son diamètre, permet un amortissement plus ou moins fort.

Compte tenu du frottement du chariot de guidage sur les colonnes du bâti support, l'amortissement global est une superposition d'un amortissement sec et d'un amortissement visqueux.

2.1. Type d'amortissement

En considérant la poussée d'Archimède sur les masses immergées, écrire l'équation d'équilibre statique du système avec le cylindre pesant plongée dans l'eau.

Ecrire dans ce cas l'équation différentielle de mouvement du système non amorti équivalent.

Montrer que la poussée d'Archimède n'intervient pas dans la définition de la pulsation propre du système ?

Rappeler la valeur de la masse oscillante M (kg) et de la pulsation propre ω_0 (rad/s) du système.

Réaliser un essai de lâcher à vitesse initiale nulle d'amplitude X_0 maximum par rapport à la position d'équilibre. Quel est le régime d'amortissement observé ?

Donner l'encadrement du coefficient d'amortissement ξ et calculer l'amortissement critique A_C en précisant son unité.

2.2. Détermination de l'ordre de grandeur du coefficient d'amortissement ξ

Déterminer la valeur approchée (à cause des frottements) du coefficient d'amortissement ξ par la méthode du décrément logarithmique.

Calculer le nombre de périodes au bout desquels le système aura perdu 95% de son amplitude.

Vérifier le résultat sur la maquette.

<u>Nota</u> : calcul du nombre d'oscillations pour que le système atteigne une amplitude égale à 5% de l'amplitude initiale.

$$\delta = \frac{1}{N}.\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+N.T)}\right) = \frac{1}{N}.\ln\left(\frac{X_0}{0,05.X_0}\right) = \frac{1}{N}.\ln 20 = \xi.\omega_0.T = \frac{2\pi.\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\ln 20.\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi.\xi}$$

3 - OSCILLATIONS FORCEES du SYSTEME DISSIPATIF

L'étude des oscillations forcées est réalisée obligatoirement en régime amorti.

L'excitation harmonique du système est réalisée par l'excentrique en bout d'arbre moteur. La vitesse angulaire ω (rad/s) du moteur défini la pulsation de l'excitation.

3.1. Mesure de la réponse du système en fonction de la fréquence de l'excitation

Quelle est la valeur de l'amplitude statique X_S de l'excitation ?

Régler le "0" sur la réglette graduée correspondant à la position moyenne du curseur du chariot.

Pour différentes valeurs de la vitesse angulaire ω du moteur calculée à partir de la fréquence de rotation $f(Hz)$ affichée sur le boîtier, relever l'amplitude X_0, par rapport à la position d'équilibre, de la réponse du système (faire suffisamment de mesures surtout au voisinage de la résonance).

Observer également le déphasage entre l'excitation et la réponse notamment à basses et à hautes fréquences.

Après avoir présenté les mesures et les calculs liés dans un tableau, tracer sur papier millimétré et à une échelle appropriée la courbe $\frac{X_0}{X_S}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

En déduire la valeur expérimentale du coefficient de surtension Q.

En déduire la valeur du coefficient d'amortissement ξ . Comparer avec celle obtenue en 2.2.

Conclusion.

Avec cette valeur de ξ, calculer la pulsation de résonance $\omega_R(rad/s)$ et la comparer avec celle de la courbe.

4 - CONCLUSION GENERALES du TP2