

**TRAVAUX PRATIQUES DE
DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES**

Techniques d'extensométrie

TP n° 3 :

Enveloppe mince

Etude d'une enveloppe mince

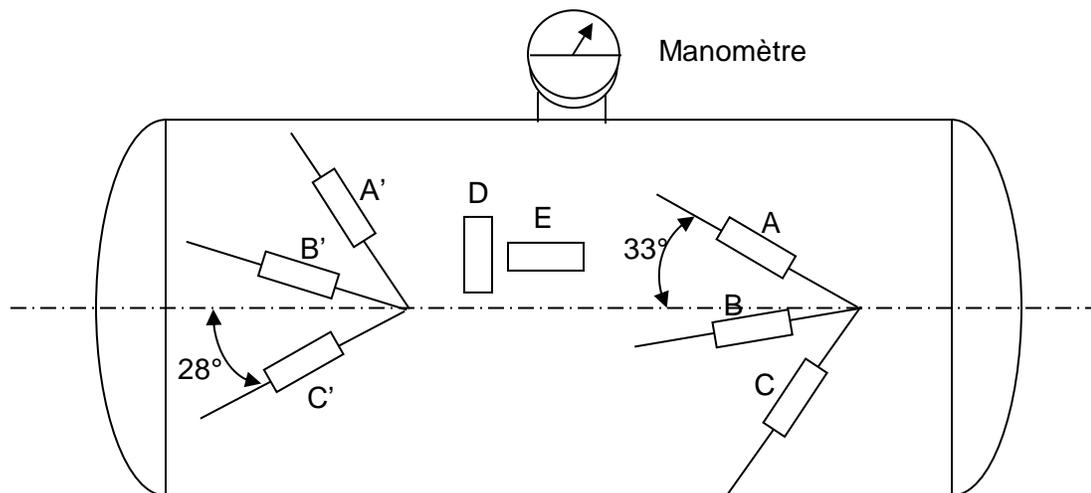
Le but du TP est d'étudier les contraintes et déformations d'un réservoir d'épaisseur mince soumis à une pression intérieure.

I. Matériel utilisé

Un réservoir d'air comprimé possède un orifice d'entrée d'air muni d'un robinet de fermeture, une purge et une prise de pression équipée d'un manomètre.

L'alimentation en air comprimé est faite à partir du réseau et la pression maximum sera de 5 bars.

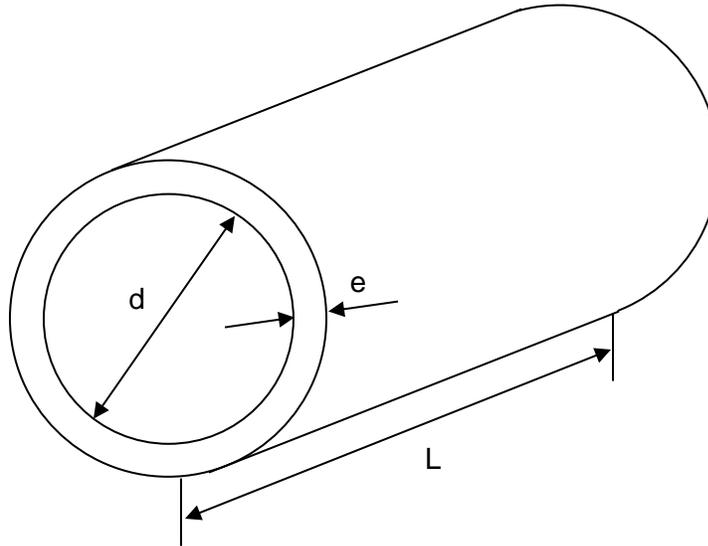
Le réservoir est équipé sur la partie centrale cylindrique de deux rosettes à 45° (assemblage de trois jauges sur un même support et faisant 45° entre elles) : **jauges A, B et C, jauges A', B' et C'** et de deux autres **jauges D et E** collées comme l'indique le schéma.



Les mesures seront faites à partir d'un pont équipé d'un boîtier de commutation.

II. Définition d'une enveloppe mince

Une enveloppe est dite mince si l'épaisseur e est faible par rapport au diamètre d ($e < \frac{d}{20}$).



III. Calcul des contraintes

Le réservoir présenté ci-dessus est soumis à une pression intérieure égale à p .

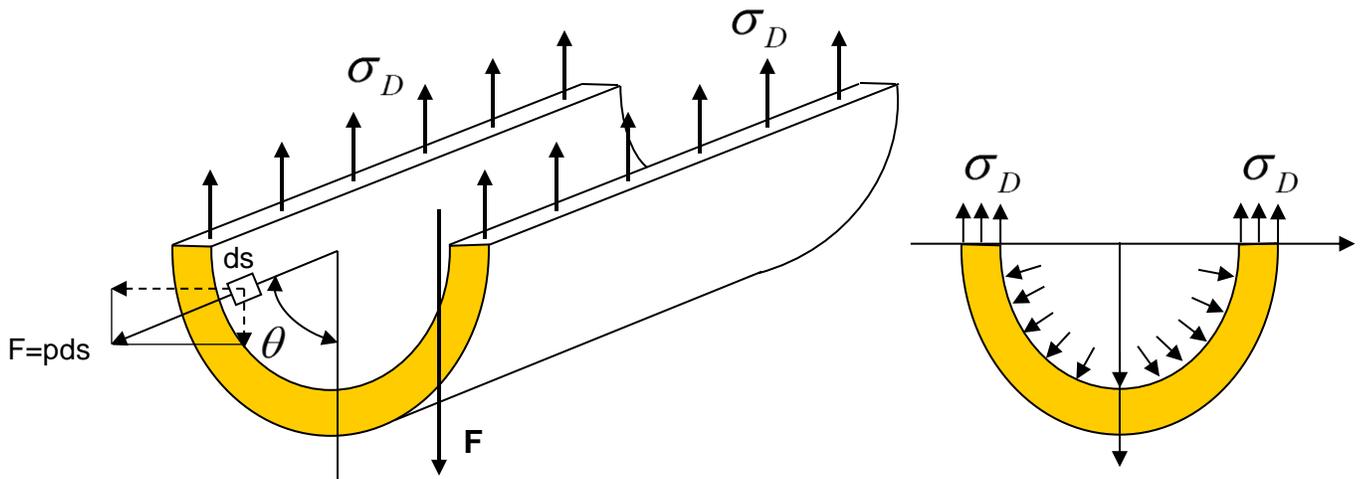
Déterminons les contraintes exercées dans la partie cylindrique (diamètre d) et celles dans les fonds hémisphériques.

1. dans la partie cylindrique

Pour mettre en évidence les contraintes dans l'enveloppe, on pratique une coupure par rapport à un plan. Isolons l'un des demi-cylindres avec l'air qui y est contenu et appliquons le principe fondamental de la statique.

La pression p tend à séparer le demi cylindre inférieur du demi cylindre supérieur caractérisée par la force F égale à :

$$F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p ds \cos \theta$$



La contrainte interne résultante σ_D agit alors sur deux surfaces rectangulaires dont l'aire totale est égale à $2eL$.

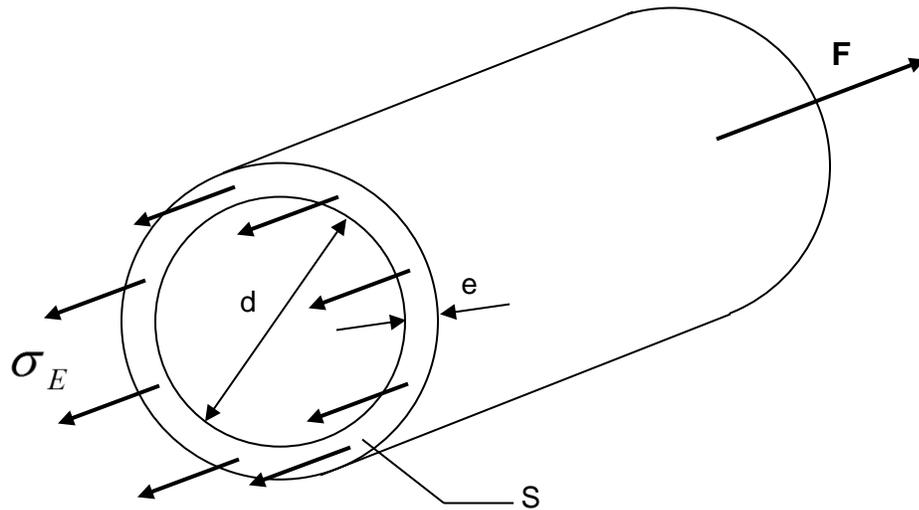
$$\text{Or } F = \sigma_D \times 2eL \quad \Rightarrow \quad \sigma_D \times 2eL = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p ds \cos \theta$$

$$\sigma_D \times 2eL = p \times dL$$

D'où $\boxed{\sigma_D = \frac{pd}{2e}}$

2. dans la partie hémisphérique

Isolons l'un des deux fonds, que l'on considère pour simplifier les calculs comme une surface circulaire plane. La pression p s'exerce sur la surface circulaire d'aire $\pi \frac{d^2}{4}$ et la contrainte interne σ_E agit sur une surface annulaire dont l'aire est sensiblement égale à $\pi d e$ (e petit devant d).



$$F = p \times \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{et} \quad F = \sigma_E \times \pi d e$$

$$\sigma_E \times \pi d e = p \times \frac{\pi d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_E = \frac{p d}{4 e}}$$

IV. But du TP et mode opératoire

1. But du TP

Le but du TP est de

- déterminer, à partir des déformations relevées sur la rosette dans trois directions, les déformations principales ε_X et ε_Y ainsi que les directions principales d'un réservoir sous pression
- calculer les contraintes dans les directions principales et de les comparer aux valeurs théoriques dans le cas d'une enveloppe mince

2. Questions

Le relevé successif des valeurs des déformations des deux rosettes $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C$, et $\varepsilon_{A'}, \varepsilon_{B'}, \varepsilon_{C'}$ puis des jauges ε_D et ε_E donne :

$$\begin{cases} \varepsilon_A = 40.10^{-6} \\ \varepsilon_B = 23.10^{-6} \\ \varepsilon_C = 66.10^{-6} \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_{A'} = 72.10^{-6} \\ \varepsilon_{B'} = 26.10^{-6} \\ \varepsilon_{C'} = 34.10^{-6} \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_D = 86.10^{-6} \\ \varepsilon_E = 20.10^{-6} \end{cases}$$

- A partir des déformations $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C$, chercher les déformations principales ε_X et ε_Y ainsi que les directions principales X et Y par les formules analytiques
NB. choisir un repère (x, y) , puis déterminer les déformations $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ et ε_{xy}
- De la même manière, calculer à partir des déformations $\varepsilon_{A'}, \varepsilon_{B'}, \varepsilon_{C'}$ les déformations principales $\varepsilon_{X'}$ et $\varepsilon_{Y'}$ puis les directions principales X' et Y'
NB. choisir un repère (x', y') , puis déterminer les déformations $\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}$ et $\varepsilon_{x'y'}$
- Comparer les valeurs de ε_X et ε_Y (puis $\varepsilon_{X'}$ et $\varepsilon_{Y'}$) aux valeurs de ε_D et ε_E .
- Calculer les contraintes principales σ_X et σ_Y puis $\sigma_{X'}$ et $\sigma_{Y'}$.
On donne : $E = 210 \text{ GPa}$ et $\nu = 0,3$
- Calculer les valeurs théoriques σ_D et σ_E (à partir des formules du paragraphe III).
On donne : $e = 3 \text{ mm}$, la pression est de 5 bars et le périmètre de l'enveloppe mince est de 80 cm.
- Comparer ces valeurs théoriques aux valeurs de σ_X et σ_Y puis de $\sigma_{X'}$ et $\sigma_{Y'}$.

ANNEXE : ETUDE DES ROSETTES D'EXTENSOMETRIE

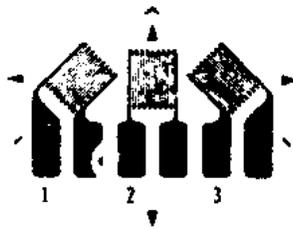
On utilise couramment dans l'industrie des « rosettes » qui sont un ensemble de deux ou trois jauges de déformation placées sur un même support faisant entre elles un même angle φ . Ces rosettes sont collées au point de mesure désiré.

Trois types de rosettes :

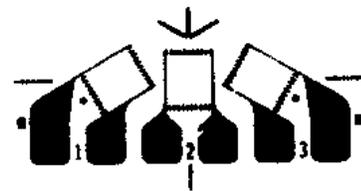
- rosette en T avec deux grilles perpendiculaires (fig.a)
- rosette rectangulaire à 45° (fig.b)
- rosette rectangulaire à 60° (fig.c)



2X
(a)



2X
(b)



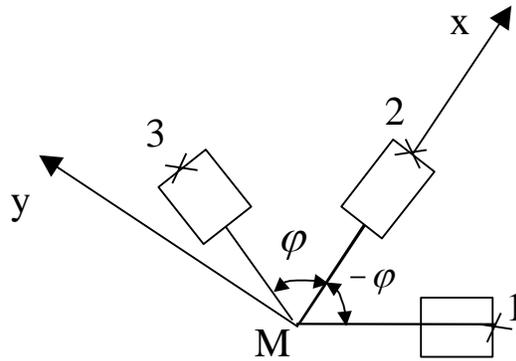
2X
(c)

3.1- Dépouillement :

Analyse d'une rosette à φ quelconque :

Soit une rosette collée à la surface d'un solide en M comportant 3 jauges 1, 2 et 3 disposées suivant des direction par rapport à (M,x) respectivement d'angles $-\varphi$, 0 et φ .

L'état de contrainte en M est plan. Soit ε_1 , ε_2 et ε_3 les trois déformations mesurées par la rosette suivant les directions 1, 2 et 3.



$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi - \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_x \\ \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \end{array} \right.$$

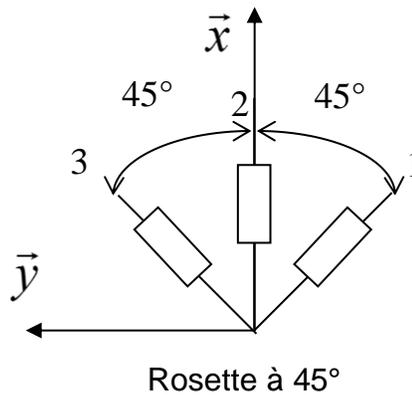
On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \varepsilon_2 \\ \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_2 \cos^2 \varphi}{2 \sin^2 \varphi} \\ \gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2 \sin \varphi \cos \varphi} \end{array} \right.$$

3.2- Exemple :

Les relevés de mesure obtenues à partir d'une rosette à 45° collée sur une pièce en aluminium indiquent :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -3790 \text{ } \mu\text{m} / \text{m} \\ \varepsilon_2 = -3220 \text{ } \mu\text{m} / \text{m} \\ \varepsilon_3 = -4750 \text{ } \mu\text{m} / \text{m} \end{cases}$$



Quelles sont les directions principales, les caractéristiques de cette pièce sont :

$$E = 72000 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \nu = 0,34$$

Quelles sont les contraintes et les déformations principales ?

Directions principales $\Rightarrow \tan 2\varphi_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1} \tan \varphi$

A.N. $\tan 2\varphi_1 = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1} \tan 45$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{-4750 + 3790}{2 \cdot (-3220) + 4750 + 3790} \tan 45$$

$$\varphi_1 = -12.28 \text{ par rapport à l'axe } 2$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi - \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_x \\ \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_2 = -3220 \text{ } \mu\text{m/m} \\ \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_2 \cos^2 \varphi}{2 \sin^2 \varphi} = \frac{-3790 - 4750 + 3220}{1} = -5320 \text{ } \mu\text{m/m} \\ \gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2 \sin \varphi \cos \varphi} = -4750 + 3790 = -960 \text{ } \mu\text{m/m} \end{cases}$$

Connaissant les caractéristiques du matériau, les lois de comportement donne les valeurs des contraintes dans le plan :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{cases}$$

A.N.

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{72000}{1-0.34^2} (-3220 - 0.34 \cdot 5320) = -409.4 \text{ MPa} \\ \sigma_y = \frac{72000}{1-0.34^2} (-5320 - 0.34 \cdot 3220) = -522.2 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = \frac{72000}{2 \times 1.34} (-960) = -25.8 \text{ MPa} \end{cases}$$

On peut alors calculer les contraintes principales :

$$\begin{cases} \sigma_X = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_Y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{cases}$$

A.N.

$$\begin{cases} \sigma_X = -466 + 62 = -404 \text{ MPa} \\ \sigma_Y = -466 - 62 = -528 \text{ MPa} \end{cases}$$

Déformations principales

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_X = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \varepsilon_Y = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_X = -4270 + 1154.5 \\ \varepsilon_Y = -4270 - 1154.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_X = -3115.5 \text{ } \mu\text{m}/\text{m} \\ \varepsilon_Y = -5424.5 \text{ } \mu\text{m}/\text{m} \end{cases}$$