

**TRAVAUX PRATIQUES DE
DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES**

TP n° 5 :

Flambement des poutres droites

Etude du flambement d'une poutre droite

Le but de cette étude est de comparer les résultats théoriques d'Euler sur le flambement des poutres droites à des résultats expérimentaux.

I. Introduction

Jusqu'à présent, nous avons étudié les poutres et les systèmes de poutres en supposant toutes les hypothèses de la résistance des matériaux vérifiées, en particulier en négligeant les déplacements pour calculer les éléments de réduction du tenseur de cohésion. Dans le cas du flambement, ces déplacements ne sont plus négligeables puisqu'ils peuvent devenir très grands sous l'effet de forces extérieures finies. En effet, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déformations et dans certains cas de grandes déformations peuvent être causées par des accroissements de charges infimes. Tous ces phénomènes sont connus sous le nom d'instabilité élastique ; le plus courant est celui du flambement d'une poutre droite élancée sous l'action d'un effort de compression.

II. Théorie d'Euler

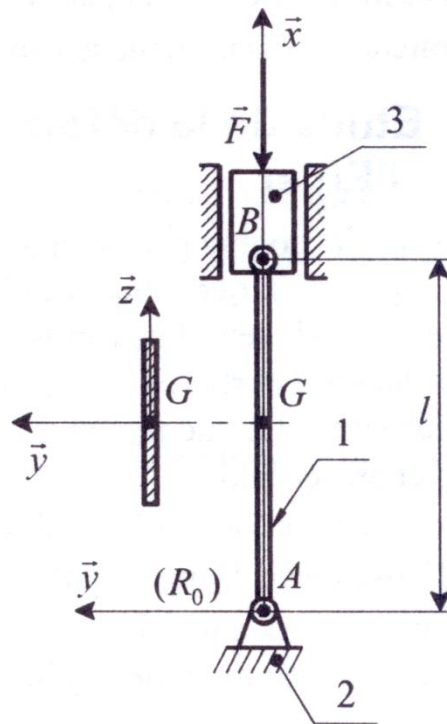
Le flambement est un phénomène mécanique équivalent à une sollicitation composée de compression et de flexion.

1. Mise en évidence du flambement

Lorsqu'une pièce en forme de poutre rectiligne suffisamment longue subit un effort axial croissant tendant à la raccourcir, on observe successivement deux types de sollicitations :

- pour une charge axiale F inférieure à une limite notée F_c (charge critique), la poutre est comprimée, elle reste rectiligne et se raccourcit.

- Lorsque la charge axiale F atteint F_C , la poutre fléchit brusquement et une instabilité apparaît, entraînant très vite la rupture de celle-ci. On observe que la flexion se produit dans le plan perpendiculaire à la direction principale de plus faible moment quadratique de la section droite de la poutre. Sur la figure ci-dessous, la flexion se produit dans le plan (A, \vec{x}, \vec{y}) perpendiculaire à (G, \vec{z}) .



2. Hypothèses de l'étude

On considère les hypothèses suivantes :

- la poutre a une section constante et une ligne moyennement droite avant déformation
- les liaisons de la poutre avec le milieu extérieur sont des liaisons pivots d'axe parallèle à \vec{z}
- dans un plan (G, \vec{y}, \vec{z}) de section droite, (G, \vec{y}) et (G, \vec{z}) sont les axes principaux et $I_{G_z} < I_{G_y}$, alors la déformation a lieu dans le plan (A, \vec{x}, \vec{y}) .

- les actions de liaison se réduisent respectivement en A et B à :

$$- \quad \{\tau_{2 \rightarrow 1}\}_A = \begin{Bmatrix} F\bar{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

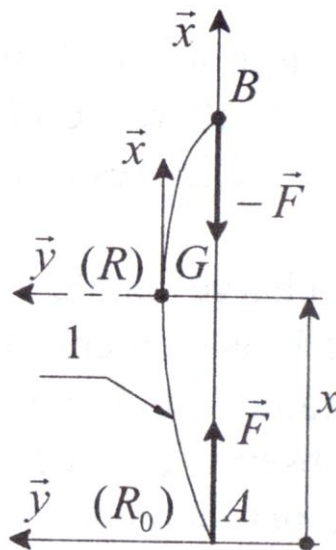
$$- \quad \{\tau_{3 \rightarrow 1}\}_B = \begin{Bmatrix} -F\bar{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

- le poids de la poutre peut être négligé.

3. Charge critique d'Euler

Poutre articulée à ses extrémités

Modélisons la poutre par sa ligne moyenne AB et supposons que sous l'influence des efforts en A et B, cette ligne moyenne prenne une légère courbure. Sur la figure ci-dessous, cette courbure est évidemment très accentuée pour la rendre visible.



Soit G le centre de surface d'une section droite d'abscisse \$x\$. Dans le plan \$(A, \bar{x}, \bar{y})\$ les coordonnées de G sont \$(x, y)\$. Considérons le repère de définition des sollicitations en G :

$$\mathfrak{R} = (G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Déterminons le torseur des forces de cohésion en G :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}_G \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = -\vec{F} \\ \vec{M}_G = G\vec{B} \wedge (-\vec{F}) \end{array} \right.$$

Dans le repère $\mathfrak{R} = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = -F\vec{x} \\ \vec{M}_G = -Fy\vec{z} \end{array} \right.$$

Etudions la déformation de la poutre sous l'effet du moment de flexion $M_{f_z} = -Fy$

$$EI_{G_z} y'' = M_{f_z} = -Fy$$

soit $EI_{G_z} y'' + Fy = 0$

Cette relation est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, sans second membre, dont la solution générale est :

$$y = A \cos(wx) + B \sin(wx) \quad \text{avec} \quad w^2 = \frac{F}{EI_{G_z}}$$

Les constantes A et B peuvent se calculer par les conditions aux limites.

- en A : $x=0$ et $y=0 \Rightarrow A=0$

- en B : $x=L$ et $y=0 \Rightarrow B \sin wL=0 \Rightarrow \sin wL=0 \quad (B \neq 0)$

$\Rightarrow wL = k\pi \quad (k=1,2,3,\dots)$

Soit $\sqrt{\frac{F}{EI_{G_z}}} = \frac{k\pi}{L}$ $F = \frac{k^2 \pi^2 EI_{G_z}}{L^2}$

Ces valeurs de la charge de compression, où k est un entier, sont les charges critiques d'Euler. En pratique, seule la première de ces charges critiques (k=1) peut être supportée par une poutre, sauf à imposer des conditions aux limites supplémentaires, comme, par exemple, empêcher le déplacement transverse de la section médiane de la poutre. Cet artifice permet d'atteindre la seconde charge critique. La plus faible valeur de F est obtenue pour k=1 ; on désigne cette valeur de F par F_C , ou **charge critique d'Euler d'ordre 1** :

$$F_C = \frac{\pi^2 EI_{G_z}}{L^2}$$

Que représente B ?

Reprenons l'équation générale de la déformée pour $A=0$: $y = B \sin(wx)$

Le maximum de la flèche y est obtenu pour $\sin(wx)=1$, c'est-à-dire pour $wx = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Or, } wL = k\pi \Rightarrow w = \frac{\pi}{L} \text{ (k=1)} \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

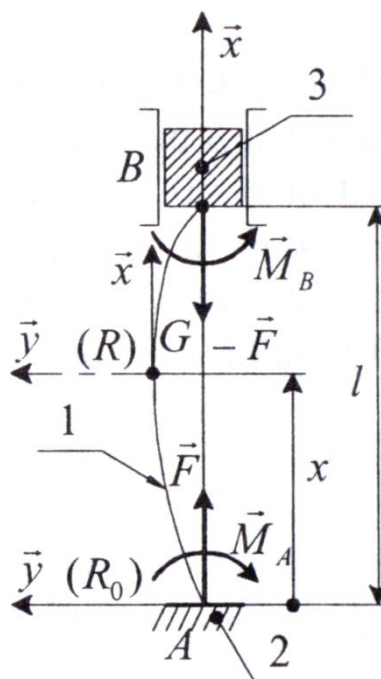
B est donc en fait la flèche maximale au milieu de la poutre.

L'équation de la déformée est alors : $y = B \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

Poutre encastree à ses extrémités

Nous étudions ce cas qui est en fait celui du TP et proche des cas réels. Il permettra également de définir la notion de « longueur libre de flambement ».

Modélisons les actions des deux liaisons encastrement aux extrémités A et B (voir figure).



La réalisation expérimentale introduit un plan de symétrie des charges (A, \bar{x}, \bar{y}) . La liaison 3-1 est telle que la résultante du torseur de liaison est parallèle à (B, \bar{x}) .

- Liaison encastrement 3-1 $\{\tau_{(3 \rightarrow 1)}\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{(3 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{B(3 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_B$ que nous exprimons plus simplement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{(3 \rightarrow 1)} = -F\bar{x} \\ \vec{M}_{B(3 \rightarrow 1)} = \vec{M}_B = M_B \bar{z} \end{array} \right. . \text{L'équilibre de la poutre 1 et la symétrie des liaisons implique que :}$$

- Liaison encastrement 2-1 $\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}_A$ que nous exprimons plus simplement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{(2 \rightarrow 1)} = -F\bar{x} \\ \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} = \vec{M}_A = -M_A \bar{z} \end{array} \right. .$$

L'étude de l'équilibre de la poutre 1 conduit à écrire que : $M_A = M_B = \mu$. Exprimons en G centre de surface d'une section droite telle que $G(x, y)$ le torseur des forces de cohésion en G :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}_G \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{B}_{(3 \rightarrow 1)} = -F\bar{x} \\ \vec{M}_G = \vec{M}_{B(3 \rightarrow 1)} + \vec{GB} \wedge \vec{B}_{(3 \rightarrow 1)} \end{array} \right.$$

$$\text{soit } \vec{M}_G = (-Fy + \mu)\bar{z}$$

\vec{M}_G est donc un moment de flexion suivant \bar{z} . On connaît l'expression de la « déformée »

dans une sollicitation de flexion : $EI_{G_z} y'' = M_{f_z}$

donc ici : $EI_{G_z} y'' = -Fy + \mu$ que l'on peut écrire : $\frac{EI_{G_z}}{F} y'' + y = \frac{\mu}{F}$.

Cette équation est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants, avec second membre, dont la solution générale est :

$$y = A \cos \varpi x + B \sin \varpi x + \frac{\mu}{F} \quad \text{avec} \quad \varpi^2 = \frac{F}{EI_{G_z}}$$

Les constantes A, B et μ peuvent se calculer par les conditions aux limites :

- en A : pour $x=0$, on a $y=0$ et $y'=0$
- en B : pour $x=l$, on a $y=0$ et $y'=0$

Notons que compte tenu de la symétrie de la figure, ces quatre conditions ne sont pas indépendantes. Ecrivons que :

$$y = A \cos \varpi x + B \sin \varpi x + \frac{\mu}{F} \quad \text{et} \quad y' = -A \varpi \sin \varpi x + B \varpi \cos \varpi x$$

Introduisons les conditions:

- pour $(x=0 ; y=0)$ $\Rightarrow 0 = A + \frac{\mu}{F}$
- pour $(x=0 ; y'=0)$ $\Rightarrow 0 = B$
- pour $(x=l ; y=0)$ et avec $B=0$ $\Rightarrow 0 = A \cos \varpi l + \frac{\mu}{F}$
- pour $(x=l ; y'=0)$ et avec $B=0$ $\Rightarrow 0 = A \varpi \sin \varpi l$

On en déduit que : $\cos \varpi l = 1$ et donc que: $\varpi l = 2k\pi$.

$$\varpi l = 2k\pi \Rightarrow \varpi = \frac{k\pi}{l/2} \quad \text{et comme} \quad \varpi^2 = \frac{F}{EI_{G_z}}, \quad \text{on obtient :}$$

$$F_C = \frac{k^2 \pi^2 EI_{G_z}}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

Autres conditions aux limites

On introduit la notion de **longueur libre de flambement**, c'est-à-dire la plus grande des distances séparant deux points d'articulation ou d'inflexion réels ou fictifs de la fibre moyenne. Cette longueur dépend de la nature des liaisons aux extrémités.

La charge critique d'ordre k de flambement devient :

$$F_C = \frac{k^2 \pi^2 EI_{G_z}}{L^2} \quad \text{avec} \quad L = \frac{l}{2}$$

Suivant les conditions aux limites, on obtient les résultats suivants :

- Pour une poutre articulée (liaison pivot) à ses deux extrémités : $L=l$
- Pour une poutre encastrée (parfaitement) à ses deux extrémités : $L=l/2$
- Pour une poutre encastrée à une extrémité et en liaison pivot à l'autre : $L=0.7 l$
- Pour une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre : $L=2l$

Domaine d'emploi du flambement

Nous venons de voir que la détermination de la charge critique d'Euler F_C était liée à la longueur libre de flambement L . D'autre part, la sollicitation de flambement suit et se combine à une sollicitation de compression. Une question se pose : quand la poutre doit-elle être calculée en compression ? En flambement ?

En effet, il est évident qu'une poutre courte et trapue a peu de chances de flamber par rapport à une poutre longue et élancée.

Elancement

On définit donc pour une poutre l'élancement λ :

$$\lambda = \frac{L}{\rho}$$

L : longueur libre de flambement

ρ : rayon de giration déduit de $\rho = \sqrt{\frac{I_{G_z}}{S}}$

Contrainte critique

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_c = \frac{F_C}{S} \\ F_C = \frac{\pi^2 EI_{G_z}}{L^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = \frac{\pi^2 EI_{G_z}}{L^2 S}}$$

$$\text{En fonction de } \lambda : \quad \lambda = \frac{L}{\rho} \Rightarrow \begin{array}{l} L = \lambda \rho \\ L^2 = \lambda^2 \rho^2 \\ L^2 = \lambda^2 \frac{I_{Gz}}{S} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$

Sécurité vis à vis du flambement

Si la poutre est constituée d'un matériau de limite élastique σ_e , elle devrait :

- Se rompre par flambement si $\sigma_c < \sigma_e$
- Périr par écrasement si $\sigma_c > \sigma_e$

La formule d'Euler n'est donc pas valable pour les petits élancements.

La valeur limite pour laquelle la formule d'Euler conduit au même résultat que l'étude de compression simple est donnée par :

$$\sigma_c = \sigma_e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}} \text{ appelée élancement critique}$$

Cette valeur de l'élancement critique ne dépend que des caractéristiques mécaniques du matériau. En réalité, le phénomène n'est pas aussi simple car la charge n'est jamais rigoureusement centrée, le matériau n'est jamais absolument homogène et la poutre n'est jamais parfaitement rectiligne.

Exemples :

- pour l'acier S185 (A33) : $E=2.10^5$ Mpa, $\sigma_e=185$ Mpa $\Rightarrow \lambda_c=104$
- pour l'acier 60SiCr7 (60SC7) : $E=2,2.10^5$ Mpa, $\sigma_e=930$ Mpa $\Rightarrow \lambda_c=49$

Les valeurs moyennes (ordre de grandeur) adoptées sont en général :

- $\lambda_c=100$ pour les profilés acier
- $\lambda_c=60$ pour les poteaux en fonte
- $\lambda_c=70$ pour les poteaux en bois

III. Montage et objectifs du TP

1. Matériel utilisé

Le kit de flambement nécessite impérativement le banc de traction-flexion EX150.

Destiné à solliciter des poutres droites à la compression, il permet :

- la mise en évidence du phénomène de flambement d'une poutre dont les extrémités peuvent, indépendamment, se trouver articulées ou encastées.
- La mesure de la variation de la flèche axiale ou transversale de la poutre, celle de l'effort de compression, et d'en déduire la charge critique d'Euler.
- La réalisation du flambement à l'ordre 1 ou à l'ordre 2 par addition d'appuis ponctuels entre les extrémités de la poutre.

Cette étude porte sur la mise en évidence du flambement à l'ordre 1 ou à l'ordre 2 de deux éprouvettes en acier et en PVC, dont les extrémités sont soit bi-articulées soit bi-encastées.

On utilisera :

- Un pied à coulisse et un réglet pour mesurer
 - l : longueur de la poutre
 - b, h : section de la poutre
- Le comparateur de la poutre dynamométrique pour mesurer la charge F de compression

2. But du TP

Les objectifs de ce TP sont pour l'éprouvette en acier et en PVC :

- de déterminer toutes les caractéristiques liées au flambement ($l, L, b, h, I_{Gz}, \rho, \lambda$)
- de calculer la contrainte critique d'Euler théorique σ_C^{Euler} à l'ordre 1 et à l'ordre 2.
- d'en déduire la contrainte critique d'Euler expérimentale σ_C^{Exp} .
- et de comparer les valeurs expérimentales aux valeurs théoriques.
- Propriétés :

Matériau	E en GPa	σ_{Ce} en MPa
Acier	210	400
PVC	3,7	30

IV. Etude expérimentale

1. Essais de flambement de la poutre d'acier h = 2 mm

Le but de ces essais est :

- d'étudier le comportement d'une poutre droite en acier à la compression
 - de découvrir expérimentalement la notion d'instabilité
 - de comparer les charges limites mesurées aux charges critiques théoriques d'Euler, dans les configurations suivantes :
- essai 1 : poutre bi-articulée, sans appui central (mode 1)
 - essai 2 : poutre bi-articulée, avec appui central (mode 2)
 - essai 3 : poutre bi-encastée, sans appui central (mode 1)
 - essai 4 : poutre bi-encastée, avec appui central (mode 2) à réaliser avec l'éprouvette acier d'épaisseur h=1 mm

Le mode opératoire pour ces quatre essais est donné dans le bulletin technique « Complément pour l'étude du flambement des poutres », pages 5 à 9.

- *Réaliser les quatre essais*
- *Interpréter les résultats et comparer l'expérience avec la théorie.*

2. Essais de flambement de la poutre PVC

Le but de ces essais est :

- d'étudier le comportement d'une poutre PVC à la compression
- de comprendre la notion d'instabilité
- de comparer les charges limites mesurées aux charges critiques théoriques d'Euler, dans les configurations suivantes :
 - essai 1 : poutre bi-articulée en mode 1
 - essai 2 : poutre articulée encastrée en mode 1

Le mode opératoire pour ces deux essais est donné dans le bulletin technique « Complément pour l'étude du flambement des poutres », pages 10 et 11.

- *Réaliser les deux essais*
- *Interpréter les résultats et comparer l'expérience avec la théorie.*