Comment préparer sa rentrée en B.U.T G.M.P.

I.U.T DE TROYES

Claire BARRITAULT

Introduction

En septembre, vous allez intégrer le département Génie Mécanique et Productique (G.M.P.) pour suivre une formation afin d'obtenir un Bachelor Universitaire de Technologie (B.U.T.) dans la même spécialité. L'objectif de cette formation est de former des responsables techniques polyvalents ou des collaborateurs d'ingénieurs qui participent aux travaux de Conception, Fabrication, Organisation et Gestion de la Production. La formation pluridisciplinaire est à la fois scientifique, technologique et managériale.

La formation est organisée en six semestres et le niveau croît au fur et à mesure que l'on passe d'un semestre à un autre. Le premier semestre est un semestre d'installation qui permet, entre autres, d'harmoniser les connaissances des étudiants venant d'origines scolaires diverses. Il est très important de l'aborder dans de bonnes conditions.

Changement important : les matières scolaires sont appelées ressources dans le cadre du B.U.T.

Ainsi, lorsque nous parlerons d'une ressource, c'est d'un ensemble de cours, travaux dirigés et travaux pratiques liés à un même domaine d'étude (conception, science des matériaux, etc.) dont il sera question.

Pour mieux comprendre et réussir ce semestre d'installation

Les enseignements sont divisés en trois types :

Cours magistraux

Ce sont des cours effectués en amphithéâtre pour toute la promotion. Les étudiants récupèrent généralement les supports numériques (en ligne, et suivant un mode qui vous sera indiqué par l'enseignant) en avance pour bien préparer le cours. Lors du cours, les étudiants doivent prendre des notes afin de compléter les contenus en ligne.

Travaux dirigés

Ce sont des séances assurées en groupes (généralement un tiers de la promotion), dédiées aux applications et aux exercices relatifs aux cours. Les étudiants doivent préparer les exercices avant de venir en classe.

Travaux pratiques et situation d'apprentissage et d'évaluation (S.A.E)

Ce sont des séances dédiées aux applications pratiques des matières. Les groupes de travaux pratiques et projets sont réduits généralement au sixième de la promotion.

Les S.A.E sont un ensemble de séances dédiées à un projet.

Ainsi, la réussite du semestre nécessite un investissement important, car en plus des heures de cours assez nombreuses, elle nécessite un travail personnel conséquent. Il faut compter 1h30 à 2h par jour de travail personnel après les cours. Il est très important d'être bien organisé et efficace. Il ne faut pas hésiter à demander conseil à votre tuteur étudiant (affecté le jour de la rentrée) ou l'équipe pédagogique.

Notions à réviser

Pour bien préparer sa rentrée, il est très important de réviser quelques notions vues au collège et au lycée, parmi celles-ci :

- Calcul algébrique : opérations, fractions, puissance ;
- Trigonométrie : cosinus, sinus, tangente, relations trigonométriques ;
- Géométrie : théorème de Pythagore, calcul des périmètres, des aires et des volumes, calcul des cordonnées polaires, projection, vecteurs ;

- Statistiques des caractéristiques de dispersion : moyenne, étendue, médiane, écart- type, variance ;
- Statistiques des lois de probabilité : loi normale, loi uniforme.

Un lien intéressant :

https://commentpourquoi.florence-guerry.fr/

Parmi les ouvrages incontournables en G.M.P :

Le guide du dessinateur industriel – A. Chevalier – Ed. Hachette (environ 35 euros).

Les chapitres qui suivent proposent quelques exercices pour les différentes ressources.

Vous êtes encouragés à rechercher les formules de calcul lorsque celles-ci vous font défaut.

MATHEMATIQUES

FACTORISATIONS

I. La distributivité

Factorisation : Lecture « droite $\boxed{\rightarrow}$ gauche » de la formule de distributivité !

$$24 \times (3 + 5) = 24 \times 3 + 24 \times 5$$

Définition :

Factoriser une expression, c'est transformer une somme ou une différence en produit.

Dans la pratique, factoriser, c'est mettre en facteur en gagnant des parenthèses dans une expression.

Méthode : Appliquer la distributivité pour le calcul mental

Vidéo https://youtu.be/sr_vOR2ALhw

Vidéo https://youtu.be/BaUpx07H0NM

Calculer astucieusement :

1) 131 x 13 + 131 x 87 2) 37 x 13 - 37 x 3 3) $4x$ + 4 x 5

1) Astuce :

On reconnaît le facteur commun **131** pour appliquer la formule de distributivité de la droite vers la gauche.

$$\mathbf{131 \times} 13 + \mathbf{131 \times} 87 = \mathbf{131 \times} (13 + 87)$$
$$= 131 \times 100 = 13100$$

2) $\color{red}{\mathbf{37 \times}}$ $13 - \color{red}{\mathbf{37 \times}}$ $3 = \color{red}{\mathbf{37 \times}}$ $(13 - 3)$

$= 37 \times 10$

$= 370$

3) $\color{red}{\mathbf{4}}x + \color{red}{\mathbf{4 \times}}$ $5 = \color{red}{\mathbf{4}}(x + 5)$

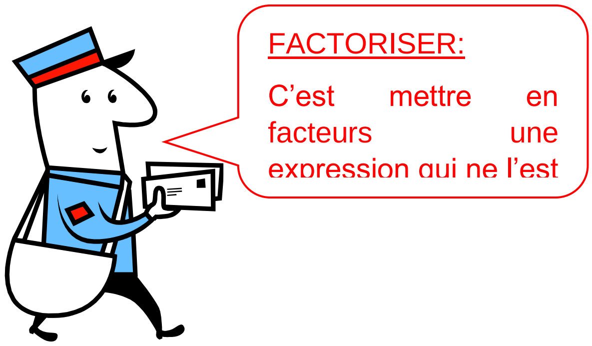
II. Factorisations avec facteur commun

Vient du latin « Factor » = « celui qui fait »

1) Introduction :

Retrouver les expressions qui sont factorisées :

$A = (2x + 1)(1 + x)$	$F = (1 + 3x)(x - 2) + 1$	$K = (x - 4) - 3(5 + 2x)$
$B = (x + 3) + (1 - 3x)$	$G = 4x - 15$	$L = (6 + x)^2 - 4(2 + 3x)$
$C = (x - 4) - 3(3 + 2x)$	$H = (8x + 4)(2x + 1)(1 + x)$	$M = (2 + 2)(3 - 4x)$
$D = 2(1 + x)$	$I = (x + 15)^2$	$N = x(x - 2)$
$E = 3(5 + x)(32 + 5x)$	$J = 4 - (x - 5)(3x - 5)$	$O = (2x + 1)^2(1 + x)$



Vidéo https://youtu.be/FTi9WOQsq3w

2) Le facteur commun est un nombre ou une inconnue isolée

Méthode : Factoriser un nombre ou une inconnue

Vidéo https://youtu.be/r3AzqvqLcI8

Pour factoriser, il faut trouver dans l'expression un facteur commun.

Trouver le facteur commun de ces expressions, puis factoriser et réduire si possible :

$A = 3{,}5x - 4{,}2x + 2{,}1x$

$B = 4t - 5tx + 3t$

$C = 4x - 4y + 8$

$D = x^2 + 3x - 5x^2$

$E = 3t + 9u + 3$

$F = 3x - x$

Exemple :

$A = 3{,}5x - 4{,}2x + 2{,}1x$

$= x(3{,}5 - 4{,}2 + 2{,}1)$

$= 1{,}4x$

3) Le facteur commun est une expression

Méthode : Factoriser une expression

Vidéo https://youtu.be/5dCsR85qd3k

Vidéo https://youtu.be/UGTFELhE9Dw

Trouver le facteur commun de ces expressions, puis factoriser et réduire le 2e facteur si possible :

$A = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$

$B = (4x - 1)(x + 6) + (4x - 1)$

$C = (1 - 6x)^2 - (1 - 6x)(2 + 5x)$

$D = 5(1 - 2x) - (4 + 3x)(2x - 1)$

Exemple : pour factoriser A, il faut trouver dans chacun des termes de l'expression un facteur commun. Il s'agit ici de $2 + 3x$.

$A = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$

$= (2 + 3x)(3 - (5 + 2x))$

$= (2 + 3x)(3 - 5 - 2x)$

$= (2 + 3x)(-2 - 2x)$

III. Factorisations en appliquant une identité remarquable

Propriété : Les identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

DEVELOPPER

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

FACTORISER

Méthode : Factoriser en appliquant les identités remarquables (1)

Vidéo https://youtu.be/5dCsR85qd3k

Vidéo https://youtu.be/VWKNW4aLeG8

Vidéo https://youtu.be/91ZSBiadxrA

Factoriser : $A = x^2 - 2x + 1$ $B = 4x^2 + 12x + 9$ $C = 9x^2 - 4$

$D = 25 + 16x^2 - 40x$ $E = 1 - 49x^2$ $F = 12t + 4 + 9t^2$

Retrouvons les termes : a^2 b^2 $2ab$ dans les expressions

Méthode : Factoriser en appliquant les identités remarquables (2)

Vidéo https://youtu.be/nLRRUMRyfZg

Vidéo https://youtu.be/tO4p9TzMrls

Factoriser et réduire :

$G = (2x + 3)^2 - 64$ $H = 1 - (2 - 5x)^2$

IV. Second degré

1) Prérequis : Les équations du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme

$ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :

L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.

- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2) Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.

- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque : Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Méthode : Factoriser un trinôme

Vidéo https://youtu.be/eKrZK1lisc8

Factoriser les trinômes suivants : a) $4x^2 + 19x - 5$ b) $9x^2 - 6x + 1$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

I. Notion d'équation

1) Vocabulaire

INCONNUE :
C'est une lettre qui désigne un nombre qu'on ne connaît pas.
Exemple : x

EGALITE OU EQUATION :
C'est une « opération à trous » dont les « trous » sont remplacés par des inconnues.
Exemple : $11x - 7 = 6$

MEMBRE :
Une équation est composée de deux membres séparés par un signe « = ».
Exemple : $11x - 7 = 6$

1er membre *2e membre*

RESOUDRE UNE EQUATION : C'est chercher et trouver le nombre inconnu.

SOLUTION : C'est la valeur de l'inconnue

2) Tester une égalité

Méthode : Tester une égalité

Vidéo https://youtu.be/xZCXVgGT_Bk

Vidéo https://youtu.be/pAJ6CBoCMGE

1) L'égalité $3x - 4 = 5 + 2x$ est-elle vraie dans les cas suivants :

a) $x = 0$

b) $x = 9$

2) A l'été, M. Bèhè, le berger, possédait 3 fois plus de moutons qu'au printemps. Lorsque arrive l'automne, il hérite de 13 nouveaux moutons. Il sera alors en possession d'un troupeau de 193 moutons.

On note x le nombre de moutons que M. Bèhè possédait au printemps.

a) Exprimer en fonction de x le nombre de moutons du troupeau à l'automne.

b) Écrire une égalité exprimant de deux façons différentes le nombre de moutons à l'automne.

c) Tester l'égalité pour différentes valeurs de x dans le but de trouver le nombre de moutons que M. Bèhè possédait au printemps.

1) a) <u>Pour $x = 0$:</u>

1^{er} membre : 3 x 0 – 4 = –4

2^e membre : 5 + 2 x 0 = 5

Les deux membres n'ont pas la même valeur, l'égalité est fausse pour $x = 0$.

b) <u>Pour $x = 9$:</u>

1^{er} membre : 3 x 9 – 4 = 23

2^e membre : 5 + 2 x 9 = 23

Les deux membres ont la même valeur, l'égalité est vraie pour $x = 9$.

2) a) $3x + 13$

b) $3x + 13 = 193$

3) Après de multiples (!) essais, on trouve pour $x = 60$:

1^{er} membre : 3 x 60 + 13 = 193

2^e membre : 193

Les deux membres ont la même valeur, l'égalité est vraie pour $x = 60$.

Au printemps, M. Bèhè possédait 60 moutons.

<u>Méthode : Vérifier si un nombre est solution d'une équation</u>

Vidéo https://youtu.be/PLuSPM6rJKI

Vérifier si 14 est solution de l'équation : $4(x-2)=3x+6$

On remplace x par 14 dans les deux membres de l'égalité :

- $4(x-2)$ = 4 (14 − 2) = 48
- $3x+6$ = 3 x 14 + 6 = 48

On a donc $4(x-2)=3x+6$ pour $x=14$.

14 vérifie l'équation, donc 14 est solution.

II. Résoudre un problème

Méthode : Mettre un problème en équation

Vidéo https://youtu.be/q3ijSWk1iF8

Une carte d'abonnement pour le cinéma coûte 10 €.

Avec cette carte, le prix d'une entrée est de 4 €.

1) Calculer le prix à payer pour 2, 3, puis 10 entrées.

2) Soit x le nombre d'entrées.

Exprimer en fonction de x le prix à payer :

a) sans compter l'abonnement,

b) en comptant l'abonnement.

3) Avec la carte d'abonnement, un client du cinéma a payé 42 € en tout. Combien d'entrées a-t-il achetées ?

1) Pour 2 entrées : 10 + 2 x 4 = 18 €

Pour 3 entrées : 10 + 3 x 4 = 22 €

Pour 10 entrées : 10 + 10 x 4 = 50 €

2) a) $4x$ b) $4x + 10$

3) $4x + 10 = 42$

En prenant $x = 8$, on a : 4 x 8 + 10 = 42

Le client a acheté 8 entrées.

III. Résolution d'équations

1) Introduction

Soit l'équation : $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$

But : Trouver x !

C'est-à-dire : isoler x dans l'équation pour arriver à :

x = nombre

Les différents éléments d'une équation sont liés ensemble par des opérations.

Nous les désignerons « liens faibles » (+ et −) et « liens forts » (x et :). Ces derniers marquent en effet une priorité opératoire. Pour signifier que le lien est fort, le symbole « x » peut être omis.

Dans l'équation ci-dessus, par exemple, $2x$ et $5x$ sont juxtaposés par le lien faible « − ». Par contre, 2 et x sont juxtaposés par un lien fort « x » qui est omis.

Dans l'équation $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$, on reconnaît des membres de la famille des x et des membres de la famille des nombres juxtaposés par des « liens faibles ».

Pour obtenir « x = nombre », on considère que la famille des x habite à gauche de la « barrière = » et la famille des nombres habite à droite.

Résoudre une équation, c'est clore deux petites réceptions où se sont réunis des x et des nombres. Une se passe chez les x et l'autre chez les nombres. La fête est finie, chacun rentre chez soi.

On sera ainsi menés à effectuer des mouvements d'un côté à l'autre de la « barrière = » en suivant des règles différentes suivant que le lien est fort ou faible.

2) Avec « lien faible »

*Le savant perse Abu Djafar Muhammad ibn Musa **al Khwarizmi** (Bagdad, 780-850) est à l'origine des méthodes appelées « al jabr » (=le reboutement ; le mot est devenu "algèbre" aujourd'hui) et « al muqabala » (=la réduction).*

Elles consistent en :
*- **al jabr :***
Dans l'équation, un terme négatif est accepté mais al Khwarizmi *s'attache à s'en débarrasser au plus vite. Pour cela, il ajoute son opposé des deux côtés de l'équation.*
Par exemple : $4x - 3 = 5$ *devient* $4x - 3 + 3 = 5 + 3$ *soit* $4x = 5 + 3$.
*- **al muqabala :***
Les termes positifs semblables sont réduits.
Par exemple : $4x = 9 + 3x$ *devient* $x = 9$. *On soustrait* $3x$ *de chaque côté de l'égalité.*

Méthode : Résoudre une équation (1)

Vidéo https://youtu.be/uV_EmbYu9_E

Résoudre : $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$

1ere étape : *chacun rentre chez soi !*

$2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$

$2x + 5x - 3x - 3x = +2 + 4$

2e étape : *réduction (des familles)*

$x = 6$

Pour un lien faible, chaque déplacement par-dessus « la barrière = » se traduit par un changement de signe de l'élément déplacé.

3) Avec « lien fort »

La méthode qui s'appelait « al hatt » consistait à diviser les deux membres de l'équation par un même nombre.

Méthode : Résoudre une équation (2)

Vidéo https://youtu.be/mK8Y-v-K0cM

Vidéo https://youtu.be/BOq2Lk9Uyw8

Résoudre les équations suivantes :

1) $2x = 6$ 2) $-3x = 4$ 3) $\frac{x}{-3} = 4$ 4) $\frac{7}{9}x = -2$

4) Avec les deux

Méthode : Résoudre une équation (3)

Vidéo https://youtu.be/QURskM271bE

Résoudre : $4x + 5 - 3x - 4 = 3x + 2 + x$

5) En supprimant des parenthèses

Méthode : Résoudre une équation contenant des expressions entre parenthèses

Vidéo https://youtu.be/quzC5C3a9jM

Résoudre : $3(x + 4) = -(x + 5) + 2$

IV. Équations particulières

1) L'équation produit

Si $a \times b = 0$, que peut-on dire de a et b ?

« Faire des essais sur des exemples, puis conclure … ! »

Propriété : Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Méthode : Résoudre une équation-produit

Vidéo https://youtu.be/APj1WPPNUgo

Vidéo https://youtu.be/VNGFmMt1W3Y

Vidéo https://youtu.be/EFgwA5f6-40

Vidéo https://youtu.be/sMvrUMUES3s

Résoudre les équations :

a) $(4x + 6)(3 - 7x) = 0$ b) $4x^2 + x = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 3 = 0$

e) $(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$

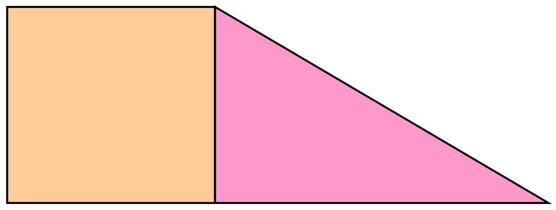
Méthode : Mettre un problème en équation

Vidéo https://youtu.be/flObKE_CyHw

Deux agriculteurs possèdent des champs ayant un côté commun de longueur inconnue. L'un est de forme carrée, l'autre à la forme d'un triangle rectangle de base 100m. Sachant que les deux champs sont de surface égale, calculer leurs dimensions.

On désigne par x la longueur du côté commun.

Les données sont représentées sur la figure suivante :



L'aire du champ carré est égale à x^2.

L'aire du champ triangulaire est égale à $\frac{100x}{2} = 50x$

Les deux champs étant de surface égale, le problème peut se ramener à résoudre l'équation : $x^2 = 50x$

Soit $x^2 - 50x = 0$

$x(x - 50) = 0$

Si un produit de facteurs est nul alors l'un au moins des facteurs est nul.

Alors $x = 0$ ou $x - 50 = 0$

$x = 0$ ou $x = 50$

La première solution ne convient pas à la situation du problème, on en déduit que le premier champ est un carré de côté de longueur 50 m et le deuxième est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesure 100 m et 50 m.

2) L'équation-quotient

Définition : Toute équation du type $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques (avec $Q(x) \neq 0$), est appelée **équation-quotient**.

Propriété : Pour tout x qui n'annule pas l'expression $Q(x)$, l'équation-quotient $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ équivaut à $P(x) = 0$.

Exemple :

L'équation « $\frac{x+2}{x+3} = 0$ » a pour solution $x = -2$.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-quotient

Vidéo https://youtu.be/zhY1HD4oLHg

Vidéo https://youtu.be/OtGN4HHwEek

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ c) $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ d) $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$

V. Résolution d'inéquations

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue *x*.

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de *x* qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs.

Méthode : Résoudre une inéquation du premier degré

Vidéo https://youtu.be/ycYfb8aHssY

Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions sur une droite graduée :

1) $2x + 3 < 4 - 5x$ 2) $2(x - 4) \leq 4x - 5$

VI. Inéquations particulières

1) Tableaux de signes

a) Compléter le tableau de valeurs de l'expression 2*x* – 10 :

x	–10	–5	0	1	6	7	10	100
2*x* – 10	-30							

b) Compléter alors la 2e ligne du tableau de signes de l'expression 2*x* – 10 :

x	$-\infty$		?		$+\infty$
2*x* – 10		…	0	…	

c) Pour quelle valeur *x,* l'expression 2*x* – 10 s'annule-t-elle ?

Compléter alors la 1$^{\text{ère}}$ ligne du tableau de signes.

d) Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique.

2) <u>Généralisation</u>

On considère *a* et *b* deux nombres fixés ($a \neq 0$) et *x* est un nombre réel.

Soit la fonction affine *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Déterminons l'abscisse *x* du point d'intersection de la droite représentative de *f* dans un repère avec l'axe des abscisses :

Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$,

soit : $ax + b = 0$,

soit : $ax = -b$,

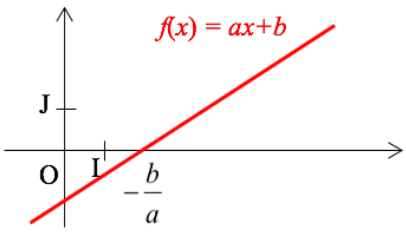
soit encore $x = -\dfrac{b}{a}$.

<u>Si a > 0 :</u>

La fonction *f* est croissante sur $\mathbb{R}$.

On obtient le tableau de signes suivant pour *ax+b* :

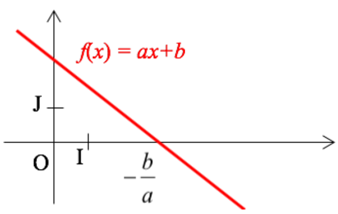
x	$-\infty$ $\qquad$ $-\dfrac{b}{a}$ $\qquad$ $+\infty$
$ax+b$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$



<u>Si a < 0 :</u>

La fonction *f* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On obtient le tableau de signes suivant pour *ax+b* :



x	$-\infty$ $\qquad$ $-\dfrac{b}{a}$ $\qquad$ $-\infty$
$ax+b$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

Méthode : Déterminer le signe d'une expression du type $ax + b$

Vidéo https://youtu.be/50CByVTP4ig

1) Déterminer le tableau de signes de l'expression $2x + 6$, où x est un nombre réel.

2) Déterminer le tableau de signes de l'expression $-3x + 12$, où x est un nombre réel.

3) L'inéquation-produit

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

Vidéo https://youtu.be/qoNLr9NkvUE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3 - 6x)(x + 2) > 0$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3 - 6x)(x + 2) > 0$ est $\left]-2\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

4) L'inéquation-quotient

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Vidéo https://youtu.be/Vitm29q8AEs

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$.

VII. Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :

L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.

- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Vidéo https://youtu.be/youUIZ-wsYk

Vidéo https://youtu.be/RhHheS2Wpyk

Vidéo https://youtu.be/v6fI2RqCCiE

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

VIII. Résolution d'une inéquation du second degré

1) Signe d'un trinôme

Vidéo https://youtu.be/sFNW9KVsTMY

Vidéo https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q

Vidéo https://youtu.be/JCVotquzIIA

Remarque préliminaire :

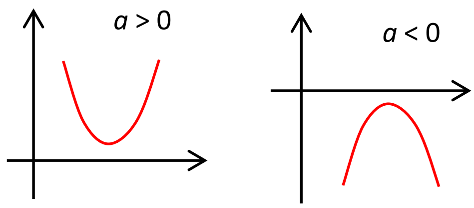
Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- si $a > 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut : 
- si $a < 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas : 

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

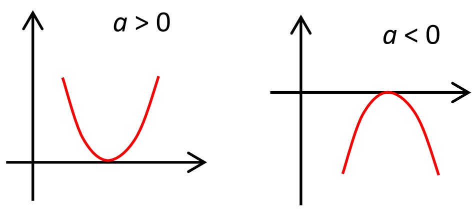
- Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a



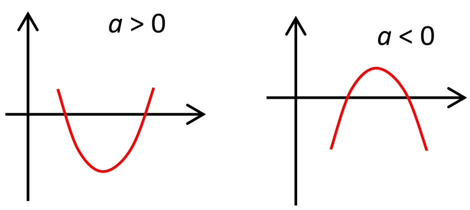
- Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a



- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a



Méthode : Résoudre une inéquation du second degré

Vidéo https://youtu.be/AEL4qKKNvp8

Résoudre l'inéquation : $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

$x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ équivaut à $x^2 + 4x - 7 < 0$.

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{44}}{2\times1} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1} = -2 + \sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc :

$]-2 - \sqrt{11}\,;\, -2 + \sqrt{11}[$.

IX. Équations et inéquations avec exponentiels, logarithmes

1) Avec les exponentiels

Propriétés : Pour tous réels a et b, on a :

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

Vidéo https://youtu.be/dA73-HT-I_Y

Vidéo https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

iUT Troyes
Génie Mécanique et Productique

2) Avec les logarithmes

Propriétés :

a) $\ln e^x = x$ b) Pour $x > 0$: $e^{\ln x} = x$

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln x = \ln y \iff x = y$

b) $\ln x < \ln y \iff x < y$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/lCT-8ijhZiE

Vidéo https://youtu.be/GDt785E8TPE

Vidéo https://youtu.be/_fpPphstjYw

Résoudre dans *I* les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln x = 2,\ \ I =]0\,;\,+\infty[$

b) $e^{x+1} = 5,\ \ I = \mathbb{R}$

c) $3\ln x - 4 = 8,\ \ I =]0\,;\,+\infty[$

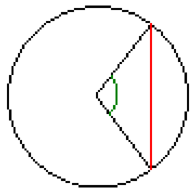
d) $\ln(6x-1) \geq 2,\ \ I = \left]\frac{1}{6}\,;\,+\infty\right[$

e) $e^x + 5 > 4\,e^x$, $I = \mathbb{R}$

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie.

Mais on attribue à *Hipparque de Nicée* (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.



Le grec *Claude Ptolémée* (90? ; 160?) poursuit dans l'*Almageste* les travaux d'*Hipparque* avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.

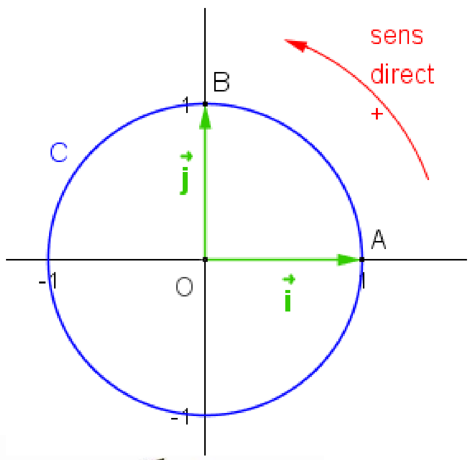
Plus tard, l'astronome et mathématicien *Regiomontanus (1436 ; 1476)*, de son vrai nom *Johann Müller* (ci-contre) développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques. Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme *sinus*.

Au XVIe siècle, le français *François Viète* (1540 ; 1607), conseiller d'*Henri IV*, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.

De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propagation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques.

I. Cercle trigonométrique et radian

1) Le cercle trigonométrique



Définition : Sur un cercle, on appelle **sens direct**, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

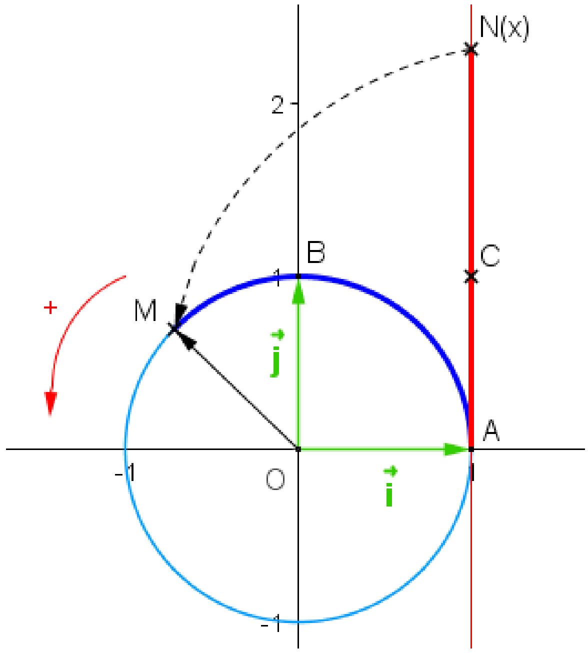
IUT Troyes
Génie Mécanique et Productique

2) Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A\,;\,\vec{\jmath})$ soit un repère de la droite.

Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

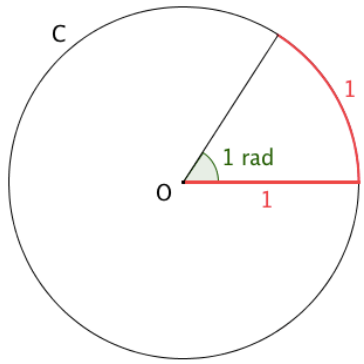


3) Le radian

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.
En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$
Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π.
On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Définition :
On appelle **radian**, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.

24



4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°. Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Méthode :
Passer des degrés aux radians et réciproquement

Vidéo https://youtu.be/-fu9bSBKM00

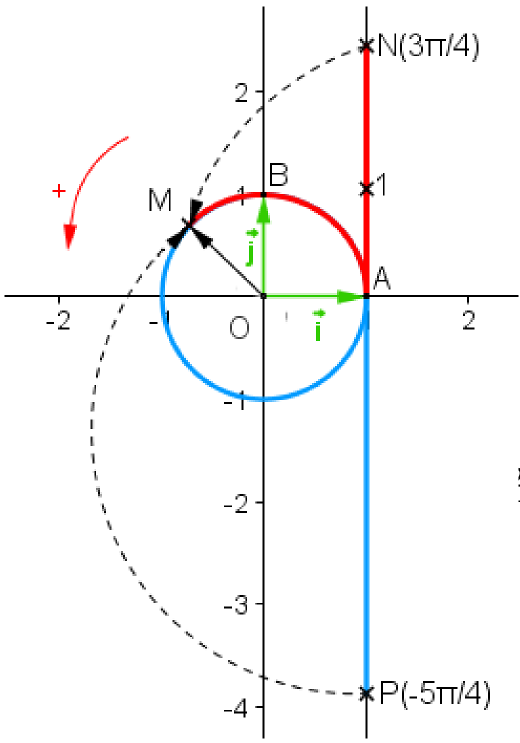
1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 33°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

2π	?	$\frac{3\pi}{8}$
360°	33°	?

II. Mesure d'un angle orienté

1) Plusieurs enroulements de la droite



A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.

Exemples :

- Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M.

En effet : $\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$

- On pourrait poursuivre le processus dans l'autre sens en effectuant deux tours successifs.

Ainsi, les points d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{19\pi}{4}$ correspondent au point M.

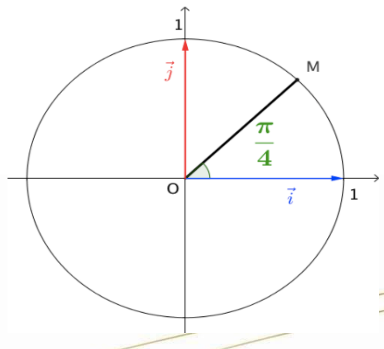
En effet : $\frac{3\pi}{4} + 4\pi = \frac{19\pi}{4}$.

Méthode : Placer un point sur le cercle trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/jE3ibn-8fDI

1) Placer sur le cercle trigonométrique, le point M tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{9\pi}{4}$ rad.

2) Placer sur le cercle trigonométrique, le point N tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{8\pi}{3}$ rad.



2) Mesure principale d'un angle orienté

On a vu qu'un angle possède plusieurs mesures.
Si θ est une mesure de l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ alors tout angle de la forme $\theta + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$.
On dit que l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ est égal à θ **modulo** 2π.

Définition : La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exemple :

Une mesure d'un angle orienté est $\frac{7\pi}{4}$.

D'autres mesures sont : $\frac{7\pi}{4} - 2\pi$; $\frac{7\pi}{4} - 4\pi$; $\frac{7\pi}{4} - 6\pi$; … soit : $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{17\pi}{4}$; …

$-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle orienté car c'est la seule comprise entre $-\pi$ exclu et π.

Méthode : Donner la mesure principale d'un angle

Vidéo https://youtu.be/BODMdi2S3rY

Donner la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

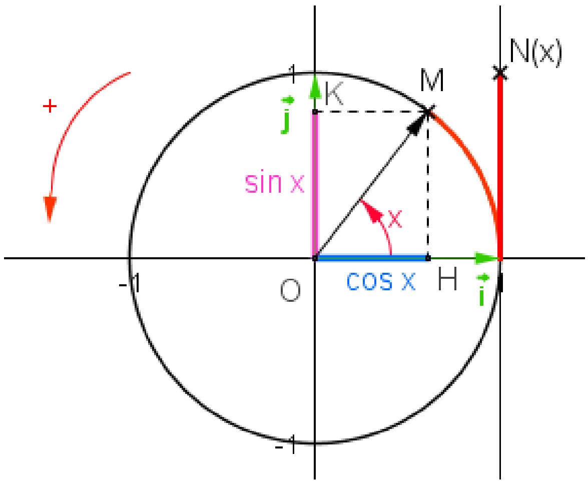
III. Cosinus et sinus d'un angle

1) Définitions :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.

Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.

À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.

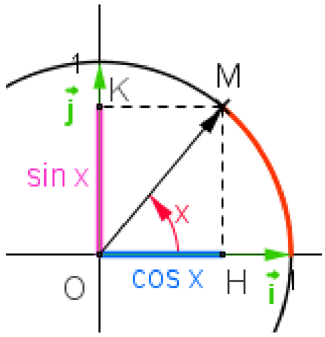


Définitions :
- Le **cosinus** du nombre réel x est l'abscisse de M et on note **cos** x.
- Le **sinus** du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note **sin** x.

2) Propriétés :

Propriétés :
1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$
2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
3) $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$
4) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif
5) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

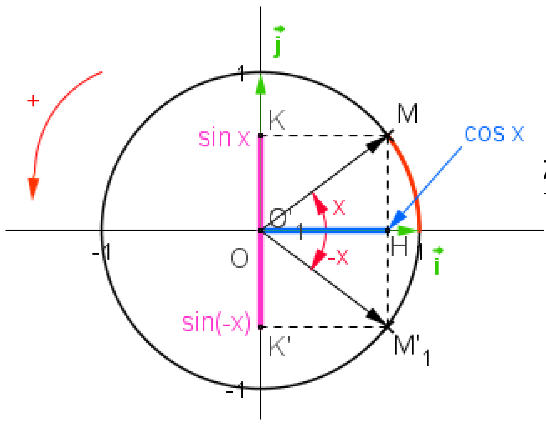
Remarque : $(\sin x)^2$, par exemple, se note $\sin^2 x$.



Démonstrations :

1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :
$-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$.

2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que :
$\cos^2 x + \sin^2 x = OM^2 = 1$.



3) Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.

4) 5) Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

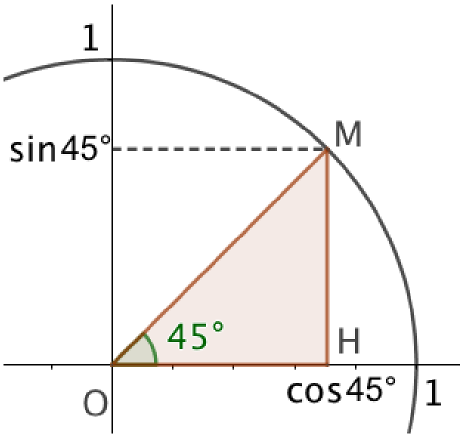
3) Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstrations :

Vidéo https://youtu.be/b2-EQupZUp8

- Démontrons que : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

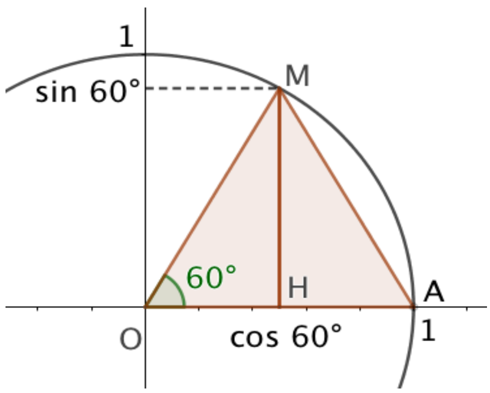


La mesure $\frac{\pi}{4}$ radian est à égale à la mesure 45°.
Le triangle OHM est rectangle est isocèle en H, en effet l'angle $\widehat{OMH}$ est égal à :
180 – 90 – 45 = 45°.
Donc HO = HM et donc : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
Soit :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Démontrons que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
.

Vidéo https://youtu.be/4R1i5Vj72Ls



La mesure $\frac{\pi}{3}$ radian est à égale à la mesure 60°.
Le triangle OMA est isocèle en O, en effet OA = OM.
Donc les angles $\widehat{OMA}$ et $\widehat{MAO}$ sont égaux à :
(180 – 60) : 2 = 60°.
Le triangle OMA est donc équilatéral.
Ainsi, la hauteur (MH) est également une médiane du triangle. Elle coupe donc [OA] en son milieu.
On a donc : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$
Soit :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lire sur le cercle trigonométrique :

Vidéo https://youtu.be/ECNX9hnhG9U

Vidéo https://youtu.be/m6tuif8ZpFY

4) Cosinus et sinus d'angles associés

Propriétés :

Pour tout nombre réel x, on a :

1) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$

2) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$

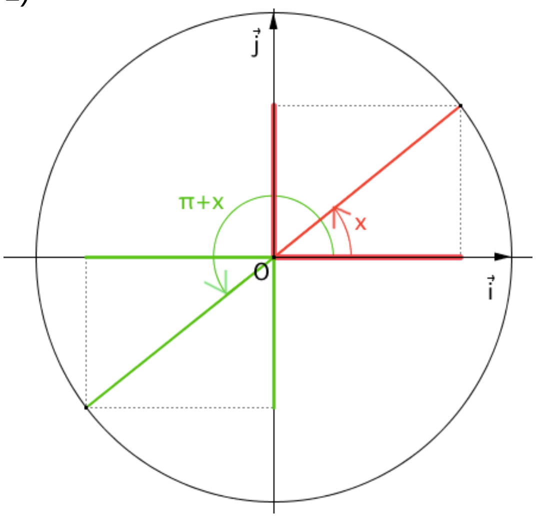
3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

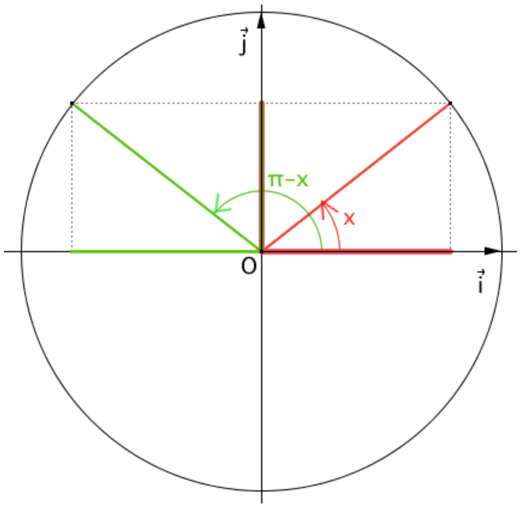
Démonstrations :

Par symétries, on démontre les résultats :

1)

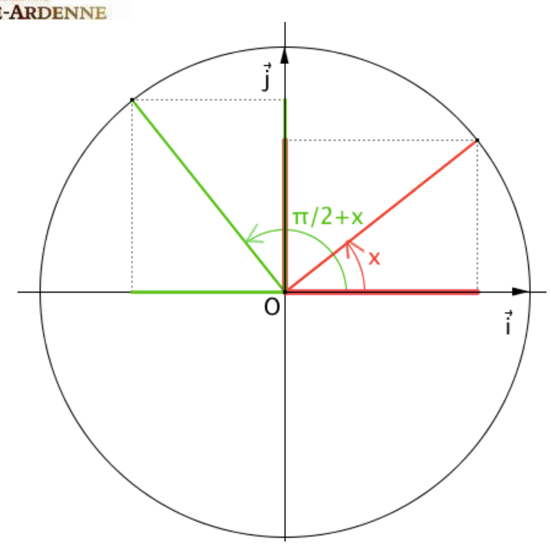


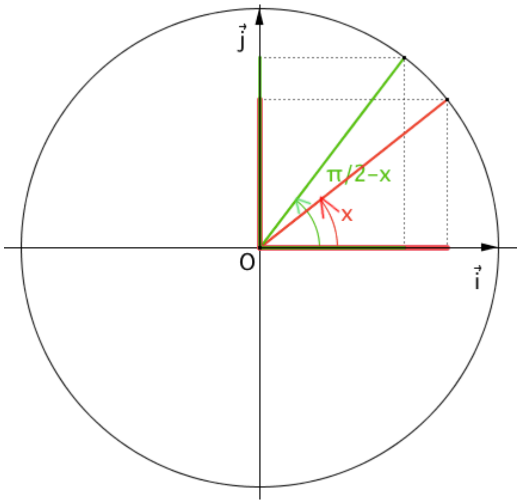
2)



3)

4)



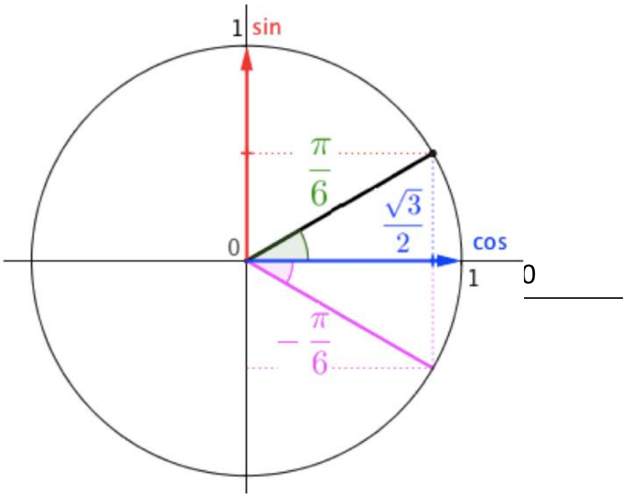


Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/NlV2zKJtvc8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$

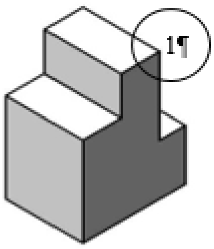


Conception

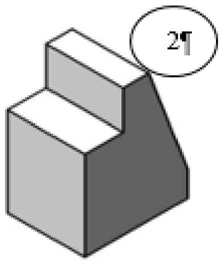
Lire les chapitres 1 à 12 du Guide du Dessinateur Industriel (GDI) :

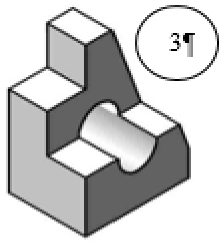
https://drive.google.com/file/d/1SeTY0VduaRuuOpnQJ1apDqr0vvh3eBQn/view?usp=sharing

Dessinez approximativement les vues de face (gris foncé), dessus (blanc) et de profil (gris clair) de chacune des pièces ci-dessous.



1





Appuyez-vous sur ces contours grisés pour dessiner les 5 pièces.

Pièce 1 :

Pièce 2 :

Pièce 3 :